

Болтенгаген И.Л.

Институт горного дела СО РАН

630091, Россия, г. Новосибирск, Красный пр., 54

homebolten@mail.ru

## СМЕЩЕНИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ ВОКРУГ ПЛАСТА

*Приведены алгебраические формулы для вычисления компонент вектора смещений и тензора напряжений в упругом массиве горных пород вокруг выработанного пространства, созданного в результате выемки запасов горизонтального пласта малой мощности на большой глубине (в сравнении с пролетом отработки).*

Академиком Л.И.Седовым в 1934г. предложена функция комплексной переменной для описания движения несжимаемой жидкости вокруг тонкого крыла [1]. Аналогичная функция использована для расчета коэффициента интенсивности напряжений трещины [2]:

$$Z_1(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{p(x)\sqrt{a^2 - x^2}}{z - x} dx,$$

где  $z = x + iy$  – комплексная переменная,  $x$  и  $y$  – горизонтальная и вертикальная координаты точки плоскости с горизонтальной щелью шириной  $2a$  (начало координат расположено в центре щели),  $p(x)$  – симметрично распределенная по берегам щели нормальная нагрузка.

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и вектора смещений  $U_x$ ,  $V_y$  определяются по формулам

$$\sigma_x = \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1', \quad \sigma_y = \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1', \quad \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z_1'.$$

$$2\mu U_x = \frac{\kappa - 1}{2} \operatorname{Re} Z_0 - y \operatorname{Im} Z_1, \quad 2\mu V_y = \frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{Im} Z_0 - y \operatorname{Re} Z_1.$$

Параметр  $\kappa$  равен  $3 - 4\nu$  в случае плоской деформации и равен  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Функция  $Z_0$  определена условием  $Z_1 = dZ_0/dz$ . В случае постоянного

нормального давления  $p_0$ , приложенного к берегам плоского разреза, функции  $Z_0$  и  $Z_1$  определяются равенствами

$$Z_0(z) = p_0 \sqrt{z^2 - a^2} - p_0 z, \quad Z_1(z) = \frac{p_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - p_0.$$

Последняя формула для функции  $Z_1(z)$  использовалась для решения ряда геомеханических проблем, связанных с особенностями распределения напряжений вокруг обрабатываемого пласта [3-5].

После алгебраических преобразований получим следующие аналитические формулы для определения компонент тензора напряжений и вектора смещений в первом квадранте плоскости ( $x \geq 0, y \geq 0$ )

$$\sigma_x = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \frac{xR_+ + yR_-}{R} - \frac{p_0 a^2 y [(x^2 - y^2 - a^2)R_- + 2xyR_+]}{\sqrt{2} R^3} - p_0,$$

$$\sigma_y = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \frac{xR_+ + yR_-}{R} + \frac{p_0 a^2 y [(x^2 - y^2 - a^2)R_- + 2xyR_+]}{\sqrt{2} R^3} - p_0,$$

$$\tau_{xy} = \frac{p_0 a^2 y [(x^2 - y^2 - a^2)R_+ - 2xyR_-]}{\sqrt{2} R^3},$$

$$2\mu U_x = \frac{\kappa - 1}{2} \left[ \frac{p_0}{\sqrt{2}} R_+ - p_0 x \right] - \frac{p_0 (y^2 R_+ - xy R_-)}{\sqrt{2} R},$$

$$2\mu V_y = \frac{\kappa + 1}{2} \left[ \frac{p_0}{\sqrt{2}} R_- - p_0 y \right] - \frac{p_0 (xy R_+ + y^2 R_-)}{\sqrt{2} R} + p_0 y,$$

где использованы следующие обозначения для радикалов

$$R = \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2},$$

$$R_+ = \sqrt{R + (x^2 - y^2 - a^2)} \quad \text{и} \quad R_- = \sqrt{R - (x^2 - y^2 - a^2)}.$$

Напряжения и смещения в других квадрантах определяются из симметрии относительно осей координат.

Приведенные формулы для аналитического определения компонент тензора напряжений и вектора смещений частного решения Седова о деформировании упругого пространства с плоским разрезом под действием постоянного нормального давления на берегах щели могут применяться для анализа геомеханических условий.

В частности, полученные формулы описывают дополнительные напряжения и смещения массива горных пород вокруг горизонтального выработанного пространства малой высоты на больших глубинах (в сравнении с его шириной), если величина  $p_0$  равна вертикальной компоненте начальных напряжений  $\gamma H$  ( $\gamma$  – удельный вес,  $H$  – глубина) и параметр  $\kappa$  равен  $3-4\nu$  (обобщенная плоская деформация). Полные величины напряжений равны сумме начальных и дополнительных напряжений.

На рис.1 показаны изолинии компонент дополнительных напряжений, обусловленных созданием выработанного пространства (в единицах  $\gamma H$ ). Вследствие симметрии, в каждом квадранте плоскости показана одна из компонент тензора. На рис.2 приведены изолинии соответствующих компонент вектора смещений (в единицах  $\gamma H a/E$ ) и тензора дополнительных деформаций (в единицах  $\gamma H/E$ ) при равенстве коэффициента Пуассона 0.25. На рис.3 показаны изолинии коэффициента запаса прочности

$$f = \frac{2C \cos \varphi + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \varphi}{\sigma_{max} - \sigma_{min}}$$

при различном отношении горизонтальной и вертикальной компонент начальных напряжений  $\lambda$ . Угол внутреннего трения  $\varphi$  и сцепление  $C$  равны  $30^\circ$  и  $0.165\gamma H$  соответственно.

Рассмотрим частные случаи распределения смещений и напряжений по координатным осям. Сначала рассмотрим горизонтальную ось координат ( $y=0$ ). В случае  $x>a$  (зона опорного давления) дополнительные напряжения и смещения определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} - p_0, \quad \sigma_y = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} - p_0,$$

$$2\mu U_x = \frac{\kappa - 1}{2} p_0 [\sqrt{(x^2 - a^2)} - x], \quad 2\mu V_y = 0.$$

В случае  $x<a$  (кровля и почва выработанного пространства) дополнительные смещения и напряжения на горизонтальной оси координат определяются по формулам

$$2\mu U_x = -\frac{\kappa-1}{2} p_0 x, 2\mu V_y = \frac{\kappa+1}{2} p_0 \sqrt{a^2 - x^2}, \sigma_x = -p_0, \sigma_y = -p_0.$$

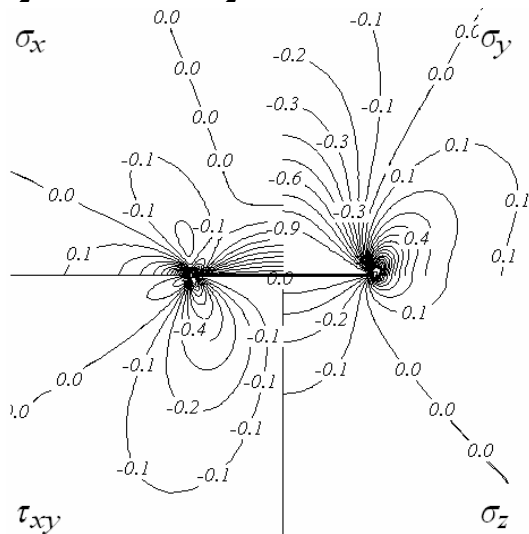


Рис.1. Изолинии напряжений.

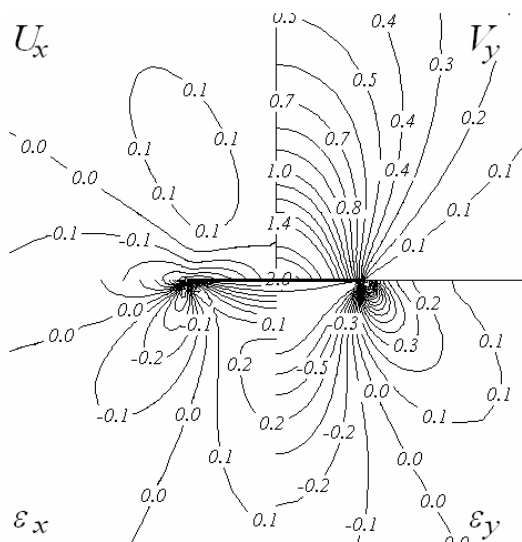


Рис.2. Изолинии смещений и деформаций.

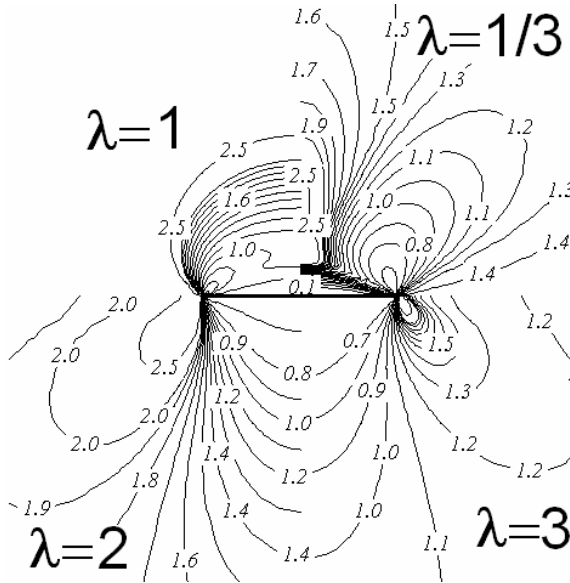


Рис.3. Изолинии коэффициента запаса прочности.

В кончике разреза ( $x=a$ ) дополнительные смещения непрерывны и определяются из уравнений

$$2\mu U_x = -\frac{\kappa-1}{2} p_0 a, \quad 2\mu V_y = 0,$$

а дополнительные напряжения имеют особенность. На берегах они равны  $-p_0$ , а при приближении к кончику разреза со стороны вмещающего упругого тела равны

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} - p_0$$

и стремятся к бесконечности. Исследуем характер особенности справа от правого кончика разреза. Введем расстояние от кончика, равное  $r=x-a$ . Уравнение для напряжения при предельном переходе  $r \rightarrow 0$

$$\sigma_x = \sigma_y \approx p_0 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} - p_0.$$

С учетом начального растяжения плоскости вертикальным напряжением  $p_0$  при малых расстояниях  $r$

получим  $\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ , где коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  определяется по формуле  $K_I = p_0\sqrt{\pi a}$ , что соответствует эллиптической трещине [6].

На вертикальной оси координат ( $x=0$ ):

$$\sigma_x = \frac{p_0 y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \left(1 + \frac{a^2}{y^2 + a^2}\right) - p_0, \quad \sigma_y = \frac{p_0 y^3}{(y^2 + a^2)^{3/2}} - p_0,$$

$$2\mu U_x = 0, \quad 2\mu V_y = \frac{p_0 a^2}{\sqrt{y^2 + a^2} + y} \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}}\right).$$

Последнее уравнение использовалось для анализа результатов экспериментов методом щелевой разгрузки [7].

Полученные аналитические формулы являются элементарными алгебраическими функциями координат и найдут применение в геомеханических исследованиях [8].

**Список литературы:** 1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. С.51. 2. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.2. – М.: Наука, 1973. С.529-530. 3. Кузнецов С.В. Общие закономерности и характерные особенности перераспределения напряжений в массивах горных пород при развитии выработанного пространства. // ФТПРПИ.-1988.-№6. 4. Кузнецов С.В., Трофимов В.А. Напряжения и смещения вокруг отработанного по простиранию участка пласта // ФТПРПИ.-2000.-№5. 5. Кузнецов С.В., Рыбаков Д.Ю., Трофимов В.А. Использование интегрального критерия прочности для оценки предельного пролета горизонтальной очистной выработки // Материалы XVI Международной научной школы им. академика С.А.Христиановича (Крым, Алушта, 18-24 сентября 2006г.) «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках». – Симферополь: Таврический национальный университет, 2006. С.152-157. 6. Брок Д. Основы механики разрушения. – М.: Высшая школа, 1980. С.18. 7. Барышников В.Д., Болтенгаген И.Л., Коврижных А.М. Определение напряжений методом щелевой разгрузки // Труды международной конференции 6-9 октября 2003, Новосибирск «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли». – Новосибирск: ИГД СО РАН, 2004. С. 126-131. 8. Болтенгаген И.Л. Геомеханический анализ камерно - целиковой системы разработки // Труды научной конференции с участием иностранных ученых 10-13 октября 2005, Новосибирск «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли». – Новосибирск: ИГД СО РАН, 2006. С. 84-92.