

РАСЧЕТ НАГРУЗОК НА ЦЕЛИКИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

К.т.н. Болтенгаген И.Л.

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск, Россия

АННОТАЦИЯ: Изложены результаты теоретических исследований влияния горных работ на напряженно-деформированное состояние массива вмещающих пород при выемке запасов пологих залежей по камерно-целиковой схеме. Получены алгебраические расчетные формулы для практических оценок смещений на контуре камер и неравномерных нагрузок на целики при различных значениях технологических параметров классического варианта системы разработки с целиками в виде сплошных стен.

Введение

Фурье-анализ является одним из наиболее эффективных методов математической физики. Последовательное чередование пар «камера-целик» позволяет использовать этот метод для оценки напряженно-деформированного состояния массива горных пород при геомеханическом анализе вариантов камерно-целиковой системы разработки пологих залежей. В работе [1] выполнен количественный анализ напряженного состояния вмещающих пород и смещений на контуре камер при различных параметрах конструктивных элементов системы разработки с использованием представлений Шевякова о равномерной нагрузке ленточных целиков. В данной статье аналогичный подход применен для практических оценок напряжений и смещений в конструктивных элементах с использованием предположения о неравномерном параболическом распределении вертикальной нагрузки в каждом целике. Получены алгебраические формулы для количественных оценок максимальных (на стенках камер) и минимальных (в центре целиков) давлений, смещений на контуре камер и напряженно-деформированного состояния массива вмещающих пород.

Равномерное распределение нагрузок на целики

В данном разделе схематично изложен подход к анализу напряжений методом Фурье и приведены основные результаты исследований в предположении равномерных нагрузок на целики. С использованием способа, предложенного в работе [2], получены следующие частные решения плоской задачи теории упругости в плоской постановке о распределении напряжений в полупространстве (x и y горизонтальная и вертикальная координата) [1]

$$\sigma_x = S \operatorname{sink}x(1 - ky)\exp(-ky), \sigma_y = S \operatorname{sink}x(1 + ky)\exp(-ky), \tau_{xy} = -S \operatorname{sink}x ky \exp(-ky)$$

и

$$\sigma_x = Q \operatorname{cosk}x(1 - ky)\exp(-ky), \sigma_y = Q \operatorname{cosk}x(1 + ky)\exp(-ky), \tau_{xy} = Q \operatorname{cosk}x ky \exp(-ky).$$

Эти распределения напряжений обусловлены периодическими распределениями вида $S \operatorname{sink}x$ или $Q \operatorname{cosk}x$ вертикального нормального давления на поверхности упругого полупространства ($y=0$). Отличительной особенностью этого частного решения является экспоненциальное уменьшение напряжений с удалением от границы полупространства и отсутствие на поверхности касательных напряжений.

Камерно-целиковая разработка является одним из наиболее древних способов добычи запасов полезных ископаемых горизонтальной или пологой залежи [3]. Подземные сооружения из камер, между которыми размещены целики (отдельные колонны или сплошные стены), имеют простую конструкцию и не требуют многих подготовительных выработок. Варианты технологии с закладкой отработанных камер и последующей выемкой рудных запасов в ленточных целиках широко применяются в современной горной практике на месторождениях Сибири [4,5]. Рассмотрим классический вариант камерно-целиковой системы разработки пологой залежи

мощности h на глубине H ($h \ll H$) с ленточными целиками и камерами прямоугольной формы высотой h и шириной b и a соответственно. Рис.1 иллюстрирует участок горных работ, содержащий две камеры и один целик из полной системы чередующихся пар «камера-целик». Пространственным периодом является суммарная ширина камеры и целика L . Изменение начального напряженного состояния под- и надработанного массивов вмещающих пород вследствие ведения горных работ можно оценить следующим образом. Разгрузка массива под и над камерами происходит из-за снятия вертикальной нагрузки γH , распределенной по горизонтальным поверхностям почвы и кровли формируемых камер до момента их создания (γ – удельный вес налегающей толщи пород). Возмущение исходного напряженного состояния массива вмещающих пород горными работами является результатом воздействия поверхностных усилий, распределенных на горизонтальных контактных границах рудного тела с вмещающими породами. В случае больших (в сравнении с мощностью залежи и размерами целиков и камер) глубин массив налегающих пород можно считать деформируемым полупространством, как и массив нижежащих горных пород. Изменения напряженного состояния пород, расположенных под и над залежью, симметричны. Пренебрежем в первом приближении касательными напряжениями на горизонтальных контактных границах целиков с вмещающими породами. Влиянием земной поверхности на глубине, значительно превышающей мощность залежи и пролет ее отработки, также можно пренебречь.

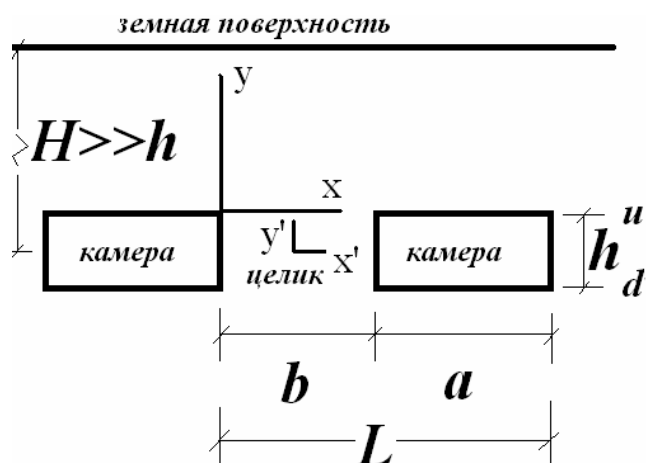


Рис.1. Часть системы чередующихся пар «камера-целик».

Абсолютная величина вертикальной пригрузки целиков σ может быть оценена по формуле Шевякова $\sigma = \gamma H a / b$ из условия равновесия $\sigma b = \gamma H a$. Влияние горных работ на напряженное состояние пород оценивается с помощью периодического ступенчатого распределения давления на нижней границе (горизонтальная линия u по кровле пласта) верхнего и на верхней границе (горизонтальная линия d по почве пласта) нижнего полупространств, показанных на рис.1 (сжатие положительно):

$$\sigma_n(x) = \begin{cases} \gamma H \frac{a}{b}, & iL \leq x \leq b + iL \\ -\gamma H, & b + iL \leq x \leq b + a + iL \end{cases},$$

где i – целое число, соответствующее номеру блока, содержащему пару «камера-целик» (нулевое значение i соответствует показанной на рис.1 паре справа от начала отчета, отрицательные и положительные значения i соответствуют блокам, расположенным соответственно слева и справа от нулевой пары).

Любая периодическая самоуравновешенная распределенная нагрузка $\sigma_n(x) = \sigma_n(x+L)$ на границе полупространства ($y=0$) может быть представлена в виде

$$\sigma_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{2\pi m}{L} x + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{2\pi m}{L} x,$$

где L – пространственный период, а коэффициенты A_m и B_m вычисляются по формулам [6]

$$A_m = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} \sigma_n(x) \sin \frac{2\pi mx}{L} dx, \quad B_m = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} \sigma_n(x) \cos \frac{2\pi mx}{L} dx.$$

Коэффициенты Фурье для ступенчатой нагрузки определяются с помощью уравнений:

$$A_m = \frac{1}{\pi m} \gamma H \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi mb}{L}\right) \quad \text{и} \quad B_m = \frac{1}{\pi m} \gamma H \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sin \frac{2\pi mb}{L}. \quad (3)$$

Полученное разложение нагрузки, приложенной на границе полупространства, показывает, что каждый из коэффициентов A_m, B_m рядов Фурье аналогичен коэффициентам S и Q в уравнениях (1) и (2), определяющих напряжения в полупространстве. Выражение $2\pi m/L$ в рядах Фурье аналогично параметру k . В соответствии с принципом суперпозиции, справедливым для линейной теории упругости, общее решение является суммой, каждое из слагаемых которой определяется соответствующим членом ряда Фурье. Напряжения в упругом полупространстве, деформируемом распределенной на ее поверхности периодической нагрузкой, определяются с помощью следующих уравнений ($k_m = 2\pi m/L$) *

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{\gamma H}{\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{ (1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x \} (1 - k_m y) \exp(-k_m y), \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{\gamma H}{\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{ (1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x \} (1 + k_m y) \exp(-k_m y), \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{\gamma H}{\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{ -(1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x \} k_m y \exp(-k_m y). \end{aligned}$$

Деформации массива рассчитываются по закону Гука. В частности, вертикальная деформация определяется следующими соотношениями (предполагается условие обобщенной плоской деформации для дополнительного напряженного состояния массива горных пород)

$$\varepsilon_y = \frac{\gamma H}{E\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{ (1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x \} \exp(-k_m y) (1 + \nu) (1 - 2\nu + k_m y).$$

Вертикальное смещение V_y получим с помощью последующего интегрирования деформации [7] (с точностью до постоянного слагаемого V_0)

$$V_y = -\frac{\gamma H}{2E\pi^2} L \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \{ (1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x \} (1 + \nu) (2 - 2\nu + k_m y) e^{-k_m y} \quad (4).$$

Горизонтальная деформация определяется следующим уравнением

$$\varepsilon_x = \frac{\gamma H}{E\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{ (1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x \} \exp(-k_m y) (1 + \nu) (1 - 2\nu - k_m y).$$

Рис.2,а иллюстрирует уменьшение влияния разработки с удалением от кровли и почвы залежи во вмещающие породы. Показаны изменения напряженного состояния массива

* Под напряжениями, деформациями и смещениями понимаются их дополнительные значения, обусловленные выемкой запасов полезного ископаемого. Результирующие (полные) величины напряжений и деформаций вычисляются суперпозицией (суммой) начального и дополнительного напряженно-деформированного состояния массива горных пород. Полные величины смещений не имеют физического смысла из-за практической невозможности воспроизвести историю создания исходного поля смещений, т.к. формирование начального поля напряжений в значительной степени обусловлено физической нелинейностью при деформировании пород в длительном геологическом процессе создания литосферы. Вычисленные с помощью исходных напряжений по закону Гука начальные деформации также отражают лишь упругую составляющую тензора деформаций. Принцип суперпозиции напряжений является следствием линейности уравнений равновесия.

вмещающих пород на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от контакта, при одинаковых размерах целиков и камер ($a=b=L/2$). Уже на расстоянии от контакта, равном ширине целика ($0.5L$), изменения напряжений вследствие ведения горных работ не превышают 25% от уровня гравитационного поля γH . Рис.2,б иллюстрирует смещения массива вмещающих пород на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от контакта пласта с вмещающими породами, при одинаковых размерах целиков и камер ($a=b=L/2$). Уже на равном ширине целика расстоянии от контакта ($0.5L$) смещения вследствие ведения горных работ не превышают 15% от уровня максимальных перемещений на контуре камер.

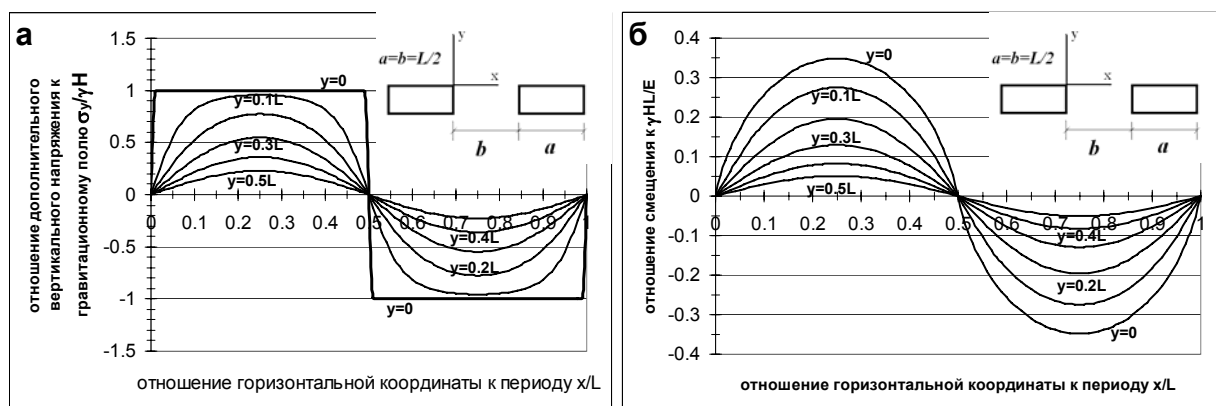


Рис.2. Распределение дополнительных вертикальных напряжений (а) и смещений (б) на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от кровли рудного тела для одинаковых размеров камер и целиков ($a=b=L/2$, $\nu=0.25$) при равномерном давлении на целик.

Неравномерное параболическое распределение нагрузки на целик

Рис.2,б иллюстрирует неравномерное распределение вертикальных смещений на контакте (линия $y=0$) целика с вмещающими породами. Физический анализ приведенных данных показывает, что подобные смещения на контакте приводят к неоднородному деформированию целика. Вертикальные напряжения в краевых частях целика (на стенках камеры) превышают напряжения в его центральной части. Сумма постоянной и параболической нагрузки на целик характеризует характер деформирования целика более точно, чем равномерное давление в соответствии с представлением Шевякова. Влияние горных работ на напряженное состояние пород в этом случае оценивается с помощью следующего периодического распределения давления на нижней границе (горизонтальная линия u по кровле пласта) верхнего и на верхней границе (горизонтальная линия d по почве пласта) нижнего полупространств, показанных на рис.1 (растяжение – отрицательно):

$$\sigma_n(x) = \begin{cases} S_1 - S_2 4 \frac{x}{b} (1 - \frac{x}{b}), & iL \leq x \leq b + iL \\ -\gamma H, & b + iL \leq x \leq b + a + iL \end{cases},$$

где S_1 – постоянная составляющая нагрузки на целик, S_2 – амплитуда растягивающей параболической составляющей давления. Величины максимального давления на стенке целика S_1 и минимального давления $S_1 - S_2$ в центре целика зависят от технологических параметров (размеров камеры, целика, блока) и величины γH . Значения S_1 и S_2 взаимосвязаны условием равновесия

$$S_1 - S_2 \frac{2}{3} = \gamma H \frac{a}{b}, \quad (1)$$

где число $2/3$ определяет среднее значение параболической составляющей нагрузки на контакте целика с вмещающими породами.

Коэффициенты Фурье-разложения дополнительной нагрузки на вмещающие породы кровли и почвы обрабатываемого пространства определяются после интегрирования по формулам

$$A_m = \frac{1}{\pi m} \left(\gamma H \frac{L}{b} + S_2 \frac{2}{3} \right) (1 - \cos k_m b) + S_2 \frac{L^2}{b^2} \frac{4}{\pi^3 m^3} \sin \frac{k_m b}{2} \left(\frac{k_m b}{2} \cos \frac{k_m b}{2} - \sin \frac{k_m b}{2} \right), \quad (2)$$

$$B_m = \frac{1}{\pi m} \left(\gamma H \frac{L}{b} + S_2 \frac{2}{3} \right) \sin k_m b + S_2 \frac{L^2}{b^2} \frac{4}{\pi^3 m^3} \cos \frac{k_m b}{2} \left(\frac{k_m b}{2} \cos \frac{k_m b}{2} - \sin \frac{k_m b}{2} \right), \quad (3)$$

где $k_m = 2\pi m/L$. Напряжения, деформации и вертикальная компонента смещений в системе отчета (x, y) вычисляются по формулам

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin k_m x + B_m \cos k_m x) (1 - k_m y) \exp(-k_m y), \quad (4)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin k_m x + B_m \cos k_m x) (1 + k_m y) \exp(-k_m y), \quad (5)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-A_m \sin k_m x + B_m \cos k_m x) k_m y \exp(-k_m y), \quad (6)$$

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{1}{E} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin k_m x + B_m \cos k_m x) (1 + \nu) (1 - 2\nu - k_m y) \exp(-k_m y), \quad (7)$$

$$\varepsilon_y(x, y) = \frac{1}{E} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin k_m x + B_m \cos k_m x) (1 + \nu) (1 - 2\nu + k_m y) \exp(-k_m y), \quad (8)$$

$$V_y(x, y) = \frac{L}{E} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi m} (A_m \sin k_m x + B_m \cos k_m x) (1 + \nu) (2 - 2\nu + k_m y) \exp(-k_m y). \quad (9)$$

Как отмечалось выше, вертикальное смещение массива вмещающих пород определяется с точностью до константы интегрирования V_0 , соответствующей смещению начала отсчета системы координат (x, y) , показанной на рис.1. Для определения констант S_1 , S_2 и V_0 необходимы три дополнительные уравнения. Первым уравнением является условие равновесия (1): снимаемая камерой вертикальная нагрузка перераспределяется на целик. Другие два уравнения могут быть получены из условий согласования вертикальных смещений в целике и породном массиве на контактной поверхности. Для этого необходим анализ напряженно-деформируемого состояния целика прямоугольной формы под действием неоднородной нагрузки, приложенной к верхней и нижней горизонтальной границе целика, и растягивающей постоянной нагрузки $-\lambda H$, приложенной к боковым границам (стенкам камеры). Постоянная составляющая вертикальной нагрузки S_1 и горизонтальная нагрузка $-\lambda H$ формируют однородное напряженное состояние. Неоднородность напряжений в целике обусловлена растягивающей параболической нагрузкой с максимумом S_2 в центре поверхности контакта целика с вмещающими породами и нулевым значением на стенках камер. Для анализа напряженного состояния прямоугольного целика более удобной является система отсчета (x', y') , начало которой находится в его центре (рис.1). Для параболической нагрузки $S_2(1 - (x'/\alpha)^2)$ на верхней и нижней поверхности целика может быть использовано следующее приближенное решение для полиномиальной функции напряжений [2]

$$\varphi(x', y') = \frac{1}{2} S_2 x'^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{x'^2}{\alpha^2} \right) + (x'^2 - \alpha^2)^2 (y'^2 - \beta^2) (\delta_1 + \delta_2 x'^2 + \delta_3 y'^2 + \delta_4 x'^4 + \delta_5 y'^4 + \delta_6 x'^2 y'^2 \dots)$$

где α и β – половина ширины и высоты целика ($\alpha = b/2$, $\beta = h/2$). Постоянные аппроксимации δ_i определяются методом Ритца из условия минимума потенциальной энергии. В частности при трех членах ряда в последней формуле постоянные δ_1 , δ_2 и δ_3 определяются из решения системы трех линейных алгебраических уравнений

$$\delta_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{64}{7} \frac{\alpha^4}{\beta^4} \right) + \delta_2 \beta^2 \left(\frac{64}{77} + \frac{64}{49} \frac{\alpha^4}{\beta^4} \right) + \delta_3 \beta^2 \left(\frac{64}{49} \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{64}{77} \frac{\alpha^6}{\beta^6} \right) = \frac{S_2}{\beta^4 \alpha^2}$$

$$\delta_1 \left(\frac{64}{11} + \frac{64 \alpha^4}{7 \beta^4} \right) + \delta_2 \beta^2 \left(\frac{192}{143} + \frac{256 \alpha^2}{77 \beta^2} + \frac{192 \alpha^4}{7 \beta^4} \right) + \delta_3 \beta^2 \left(\frac{64 \alpha^2}{77 \beta^2} + \frac{64 \alpha^6}{77 \beta^6} \right) = \frac{S_2}{\beta^4 \alpha^2}$$

$$\delta_1 \left(\frac{64}{7} + \frac{64 \alpha^4}{11 \beta^4} \right) + \delta_2 \beta^2 \left(\frac{64}{77} + \frac{64 \alpha^4}{77 \beta^4} \right) + \delta_3 \beta^2 \left(\frac{192 \alpha^2}{7 \beta^2} + \frac{256 \alpha^4}{77 \beta^4} + \frac{192 \alpha^6}{143 \beta^6} \right) = \frac{S_2}{\beta^4 \alpha^2}.$$

Напряжения в целике, обусловленные растягивающей параболической нагрузкой на его верхней и нижней границе, определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} = 4(x'^2 - \alpha^2)^2 (3y'^2 - \beta^2) (\delta_1 + \delta_2 x'^2 + \delta_3 y'^2) + 2\delta_3 (x'^2 - \alpha^2)^2 (y'^2 - \beta^2) (5y'^2 - \beta^2) \quad (10)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} = 4(y'^2 - \beta^2)^2 (3x'^2 - \alpha^2) (\delta_1 + \delta_2 x'^2 + \delta_3 y'^2) + 2\delta_2 (y'^2 - \beta^2)^2 (x'^2 - \alpha^2) (5x'^2 - \alpha^2) + S_2 \left(1 - \frac{x'^2}{\alpha^2} \right)$$

На основании теоретического анализа напряжений сделан вывод о том, что при отношении ширины целика к его высоте в интервале значений $0.5 \div 2$ вполне удовлетворительная для приближенных практических оценок точность (около 10%) достигается при использовании более простой аппроксимации функции напряжений с одной константой δ_1 , определяемой по формуле

$$\delta_1 = \frac{S_2}{\beta^4 \alpha^2} \frac{1}{\frac{64}{7} + \frac{256 \alpha^2}{49 \beta^2} + \frac{64 \alpha^4}{7 \beta^4}}.$$

Вертикальная деформация в целике определяется в этом случае по формуле

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V_y}{\partial y'} = \frac{1}{E} S_2 (1 - \nu^2) \left(1 - x'^2 / \alpha^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{E} 4\delta_1 \{ (1 - \nu^2) (y'^2 - \beta^2)^2 [3x'^2 - \alpha^2] - \nu(1 + \nu) (x'^2 - \alpha^2)^2 [3y'^2 - \beta^2] \}$$

Вертикальное смещение в целике вычисляется после интегрирования деформации по формуле

$$V_y = \int \varepsilon_y dy' = \frac{1}{E} S_2 (1 - \nu^2) \left(1 - x'^2 / \alpha^2 \right) y' +$$

$$+ \frac{1}{E} 4\delta_1 (1 - \nu^2) [3x'^2 - \alpha^2] \frac{1}{15} y' [3y'^4 - 10\beta^2 y'^2 + 15\beta^4] - \quad (11)$$

$$- \frac{1}{E} 4\delta_1 \nu (1 + \nu) (x'^2 - \alpha^2)^2 y' (y'^2 - \beta^2)$$

Смещение на верхней горизонтальной границе целика на контакте с вмещающими породами определяются с помощью уравнения

$$V_y \Big|_{y=\beta=h/2} = \frac{1}{E} S_2 (1 - \nu^2) \frac{h}{2} \left\{ \left(1 - \frac{x'^2}{\alpha^2} \right) + \delta \left[3 \frac{x'^2}{\alpha^2} - 1 \right] \right\},$$

где

$$\delta = \frac{32}{15} \frac{1}{\frac{64}{7} + \frac{256 \alpha^2}{49 \beta^2} + \frac{64 \alpha^4}{7 \beta^4}} = \frac{7}{30} \frac{1}{1 + \frac{4 \beta^2}{7 h^2} + \frac{\beta^4}{h^4}}.$$

В частных случаях: на краю ($x'=\alpha$) и в центре ($x'=0$) контакта целика с вмещающими породами

$$V_y \Big|_{y'=\beta=h/2, x'=\alpha} = \frac{1}{E} S_2 (1 - \nu^2) h \delta \quad \text{и} \quad V_y \Big|_{y'=\beta=h/2, x'=0} = \frac{1}{E} S_2 (1 - \nu^2) \frac{h}{2} (1 - \delta).$$

Разность смещений в центре и на краю целика равна

$$\Delta V_y = \frac{1}{E} S_2 (1 - \nu^2) (1 - 3\delta) \frac{h}{2}.$$

Полученная с использованием Фурье-анализа разность смещений вмещающих пород в центре и на краю контакта с целиком должна быть аналогичной. Смещение на контактной поверхности целика с вмещающими породами определяется по формуле

$$V_y(x, y) \Big|_{y=0} = \frac{L}{E} (1 - \nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} (A_m \sin k_m x + B_m \cos k_m x).$$

Смещения в центре и на краю контакта пород с целиком определяются по формулам

$$V_y(x, y) \Big|_{y=0, x=0} = \frac{L}{E} (1 - \nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} B_m, \quad V_y(x, y) \Big|_{y=0, x=b/2} = \frac{L}{E} (1 - \nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} (A_m \sin \frac{k_m b}{2} + B_m \cos \frac{k_m b}{2}).$$

Разность смещений вмещающих пород в центре и на краю контакта с целиком равна

$$\Delta V_y = \frac{L}{E} (1 - \nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} (A_m \sin \frac{k_m b}{2} + B_m [\cos \frac{k_m b}{2} - 1]).$$

Из условия равенства соответствующих разностей смещений в целике и во вмещающих породах получим следующее уравнение для определения амплитуды параболической компоненты нагрузки на целик S_2

$$\frac{1}{E} S_2 (1 - \nu^2) (1 - 3\delta) \frac{h}{2} = \frac{L}{E} (1 - \nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} (A_m \sin \frac{k_m b}{2} + B_m [\cos \frac{k_m b}{2} - 1]).$$

После подстановки в правую часть уравнения значений коэффициентов Фурье и алгебраических преобразований, получим следующую формулу для вычисления S_2

$$S_2 = \gamma H \frac{L}{b} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m^2} [(1 - \cos k_m b) \sin \frac{k_m b}{2} + \sin k_m b (\cos \frac{k_m b}{2} - 1)]}{(1 - 3\delta) \frac{h}{2L} - \frac{2}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 m^2} [(1 - \cos k_m b) \sin \frac{k_m b}{2} + \sin k_m b (\cos \frac{k_m b}{2} - 1)] - \frac{L^2}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4 m^4} (\frac{k_m b}{2} \cos \frac{k_m b}{2} - \sin \frac{k_m b}{2}) (1 - \cos \frac{k_m b}{2})}. \quad (12)$$

Постоянная составляющая нагрузки на целик S_1 определяется из условия равновесия (1)

$$S_1 = \gamma H \frac{a}{b} + \frac{2}{3} S_2. \quad (13)$$

Последние два уравнения позволяют рассчитать величину максимальной нагрузки на целик S_1 на контакте у стенки камеры и величину S_2 , характеризующую максимальное значение растягивающей параболической составляющей нагрузки на целик в центре контакта с вмещающими породами с минимальной нагрузкой $S_1 - S_2$.

Константу V_0 , равную величине смещения начала отчета системы координат (x, y) в системе координат, связанной с центром целика (x', y') определим из условия равенства смещений массива вмещающих пород и целика на контакте в угловой точке камеры с учетом однородной вертикальной S_1 и горизонтальной растягивающей $-\lambda \gamma H$ нагрузки в целике

$$\frac{L}{E} (1 - \nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} B_m + V_0 = \frac{1 - \nu^2}{E} S_2 \delta h - \frac{1 - \nu^2}{E} S_1 \frac{h}{2} - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \lambda \gamma H \frac{h}{2},$$

Разрешая последнее уравнение, получим следующую формулу

$$EV_0 = S_2 \delta h - S_1 \frac{h}{2} - \frac{\nu}{1-\nu} \lambda \gamma H \frac{h}{2} - L \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m} B_m . \quad (14)$$

Для расчетов напряженно-деформированного состояния массива горных пород при камерно-целиковой системе разработки необходимо выполнить следующие вычислительные операции. С помощью формул (12-13) определяется величина максимальной нагрузки на целик S_1 на контакте у стенки камеры и величину S_2 , характеризующую максимальное значение растягивающей параболической составляющей нагрузки на целик в центре контакта с вмещающими породами с минимальной нагрузкой $S_1 - S_2$. Напряжение и смещение в целике оцениваются по формулам (10-11). Коэффициенты Фурье-разложения дополнительной нагрузки на вмещающие породы, обусловленной созданием выработок, вычисляются по формулам (2-3). Напряжения, деформации и смещения во вмещающих породах определяются с помощью формул (4-9). Постоянная, характеризующая смещение угла камеры относительно центра целика, вычисляется по формуле (14).

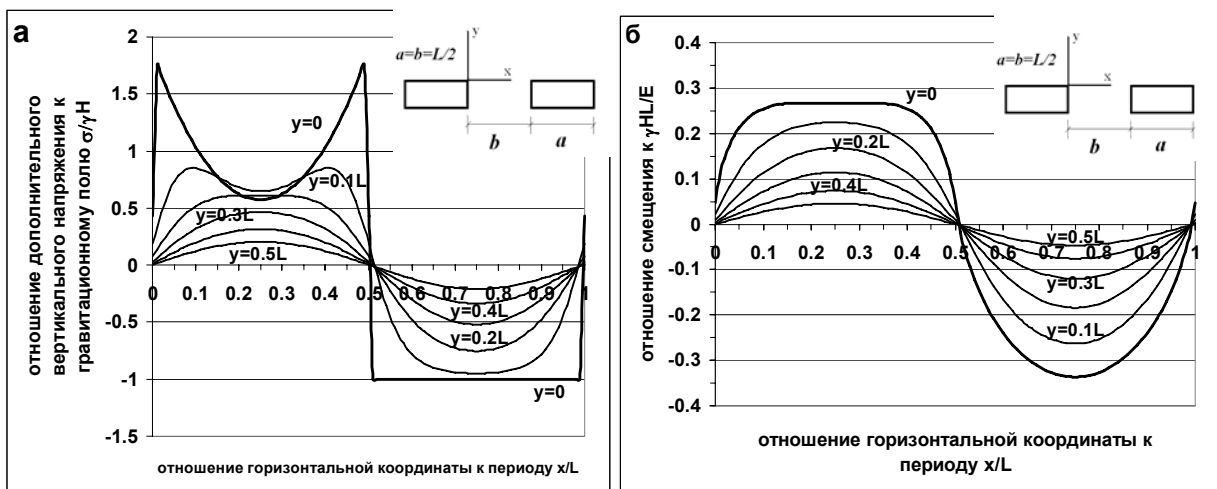


Рис.3. Распределение дополнительных вертикальных напряжений (а) и смещений (б) на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от кровли рудного тела для одинаковых размеров камер и целиков ($a=b=L/2$, $\nu=0.25$) при неравномерном параболическом распределении давления на целик..

Анализ результатов

На рис.3 показаны распределения напряжений и смещений массива вмещающих пород на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от контакта с целиком для равных размеров целика и камеры ($a=b=L/2$) и при их высоте, вдвое меньшей ширины блока ($h=L/2$). Сопоставление с вариантом распределения напряжений и смещений для менее точного приближения однородных напряжений в целике в соответствии с подходом Шевякова (рис.2) показывает следующее. Смещение на контакте целика с породами является более пологим; на расстояниях более $0.3L$ от контакта различие мало. Смещения над камерой практически совпадают. Оценки, полученные с помощью упрощающего предположения об однородной нагрузке на целик, могут использоваться для практических оценок смещений на контуре камер. Рис.4,а,б,в иллюстрирует изменение вертикальных нагрузок на целик при различных технологических параметрах для $\nu=0.25$. На рис.4,г показаны величины смещения центра кровли камеры относительно центра целика в системе координат (x',y') при различных размерах целиков и камер.

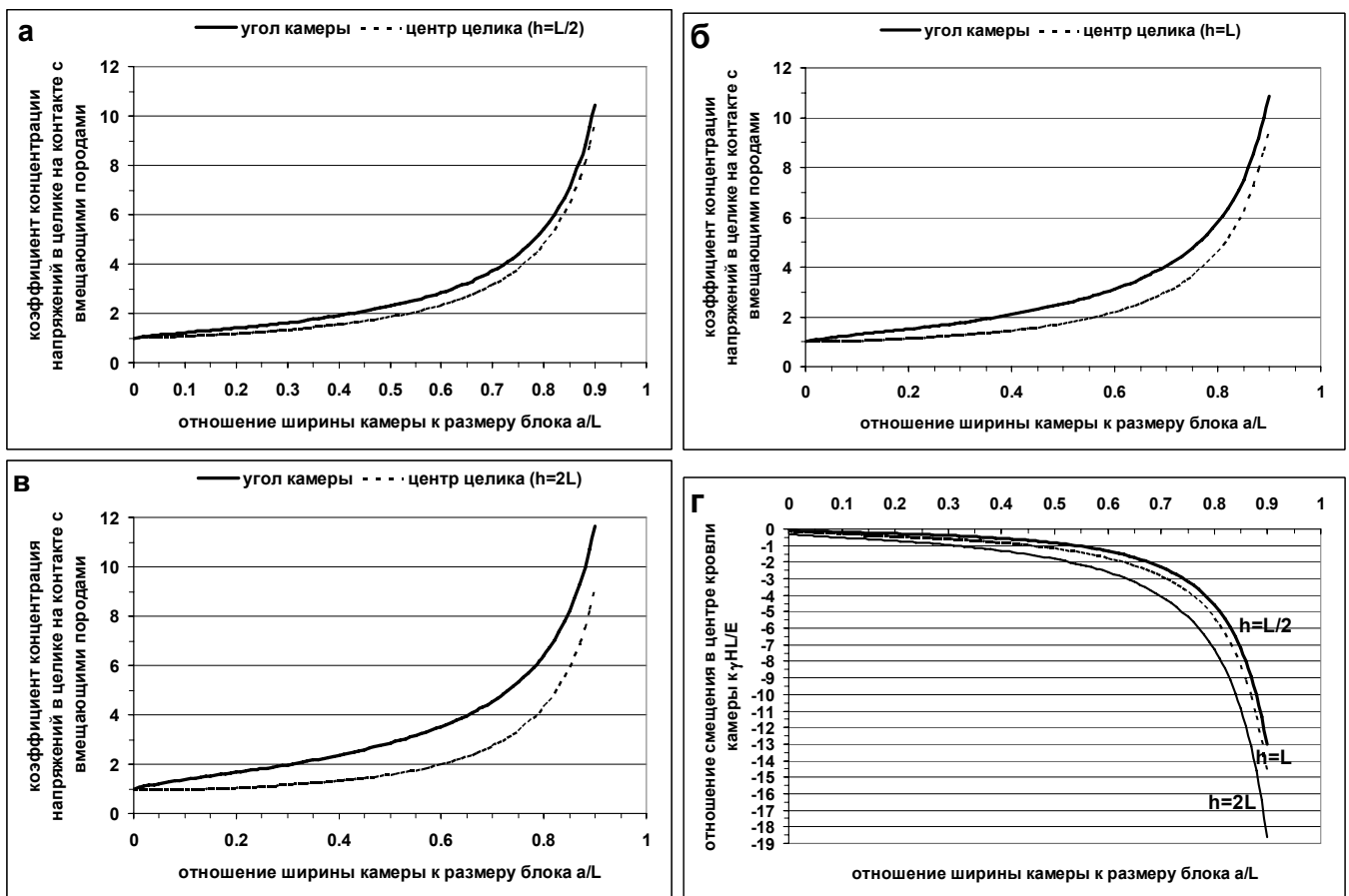


Рис.4. Зависимость коэффициента концентрации полных напряжений на контакте с вмещающими породами в углу камеры ($1+S_1/\gamma H$; сплошные линии) и в центре контакта ($1+(S_1-S_2)/\gamma H$; пунктирные линии) от относительной ширины камеры (a/L) для различной высоты целика: $h=L/2$ (а), $h=L$ (б) и $h=2L$ (в). Зависимость смещения центра кровли камеры от относительной ширины камеры (a/L) при различной высоте целика и камеры h (г).

Вывод

С использованием метода Фурье получены расчетные формулы для практической оценки величин напряжений, деформаций и смещений в конструктивных элементах камерно-целиковой системы разработки при различных значениях технологических параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтенгаген И.Л. Оценка напряженного состояния конструктивных элементов варианта камерно-целиковой системы разработки // Доклад на научной конференции с участием иностранных ученых «Фундаментальные проблемы формирования техногенной среды», 10-13 октября 2006, Новосибирск.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. –М.: Наука, 1975. С.70-72. С.269-272.
3. Агрикола Г. О горном деле и металлургии. -М.: Издательство АН СССР, 1962. С.213.
4. Мамонов А.Ф. Взаимодействие вмещающих пород с закладочным массивом на россыпных шахтах севера. –Якутск: Издательство ЯНЦ СО РАН, 1999. С.58-114.
5. Барышников В.Д и др. Геомеханический анализ напряженного состояния массива горных пород при отработке опытно-промышленного блока рудника «Интернациональный» // Труды Международной конференции «Проблемы и перспективы развития горных наук», посвященной 60-летию образования Горно-геологического института СО АН СССР – Института горного дела РАН, 1-5 ноября 2004г., Новосибирск. Т.1 «Геомеханика». -Новосибирск: ИГД СО РАН, 2005. С.103.
6. Крауфорд Ф. Волны. –М.: Наука, 1976. С.71.
7. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. –М.: Наука, 1978. С. 116 (интегралы 565.1 и 567.1).