

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ГЕОМАТЕРИАЛОВ ПО ЧАСТОТЕ КОЛЕБАНИЙ ПОМЕЩЕННОГО В СРЕДУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЗОНДА

И.Л.Болтенгаген

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск, Россия

Исследовалось влияние модуля упругости грунта на характер колебаний заглубленного стального цилиндра. Для компьютерного моделирования использовался метод конечных элементов.

DEFINITION OF DEFORMATION PROPERTIES OF GEOMATERIALS BY OSCILLATION FREQUENCY OF CYLINDRICAL SONDE IN MEDIUM

I.L.Boltenhagen

Institute of Mining, Novosibirsk, Russia

The dependence of oscillation process of deepening steel cylinder on elastic modulus of soil is studied. The finite element method was used for computer decision of dynamical problems.

Введение.

В механике горных пород существует большое количество проблем, связанных с динамическими процессами, наиболее актуальная из которых – горный удар. Широкий класс нестационарных задач возникает при исследовании процесса забивания свай [1]. Сложность моделирования динамических процессов в грунтах и горных породах связана с разнообразием их физических свойств. Контролируемые динамические возмущения грунтов и горных пород позволяют получать ценную информацию о напряженном состоянии [2] и свойствах [3] геоматериалов в естественных условиях. Малые величины нагрузок, используемых в данных способах для возбуждения волновых процессов, позволяют использовать методы теории упругости для их описания [4]. Поведение системы «среда – зонд» с учетом особенностей их контактного взаимодействия может быть исследовано методами компьютерного моделирования. Метод конечных элементов (МКЭ) используется в механике грунтов и горных пород в основном для решения статических задач [5]. Применение МКЭ в некоторых областях механики деформируемого твердого тела (например, при анализе проблем, связанных с пробиванием стальной преграды высокоскоростным ударником [6]) свидетельствует о его эффективности и для решения нестационарных задач.

В статье изложены результаты теоретических исследований переходных колебаний погруженного в грунт стального цилиндра, инициируемых быстрым сбросом приложенной к нему нагрузки. Процесс колебаний цилиндра моделировался с помощью метода конечных элементов. Выполнен спектральный анализ колебаний. Получена зависимость собственных частот системы «среда- зонд» от модуля упругости грунта. Обсуждаются возможности квазистатического подхода к анализу колебаний упругих систем.

Постановка задачи.

На рис.1,а приведена схема расчетной области. В упругом полупространстве у свободной горизонтальной поверхности находится заостренный цилиндрический зонд диаметром D и длиной L . В начальный момент времени упругое полупространство деформировано под действием вертикальной силы F_0 , приложенной в центре верхней торцевой поверхности зонда. За время τ величина силы линейно снижается от F_0 до нуля. Моделирование колебаний упругого полупространства после быстрого сброса нагрузки выполнялось при различных параметрах, варьирувавшихся около следующих базовых значений основного расчетного варианта. Модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность стального цилиндра и грунтового массива: $E_f = 200$ ГПа, $\nu_f = 0.25$, $\rho_f = 7.7$ г/см³ и $E_s = 20$ МПа, $\nu_s = 0.25$, $\rho_s = 1.7$ г/см³ соответственно. Начальное значение силы $F_0 = 100$ Н, время сброса нагрузки $\tau = 0.1$ мсек, диаметр и длина зонда $D = 3$ см и $L = 50$ см.

Исследовались зависимость начального вертикального смещения верхней торцевой поверхности цилиндра V_0 от его длины L и влияние деформационных свойств грунта (E_s) на характер колебаний погружного зонда.

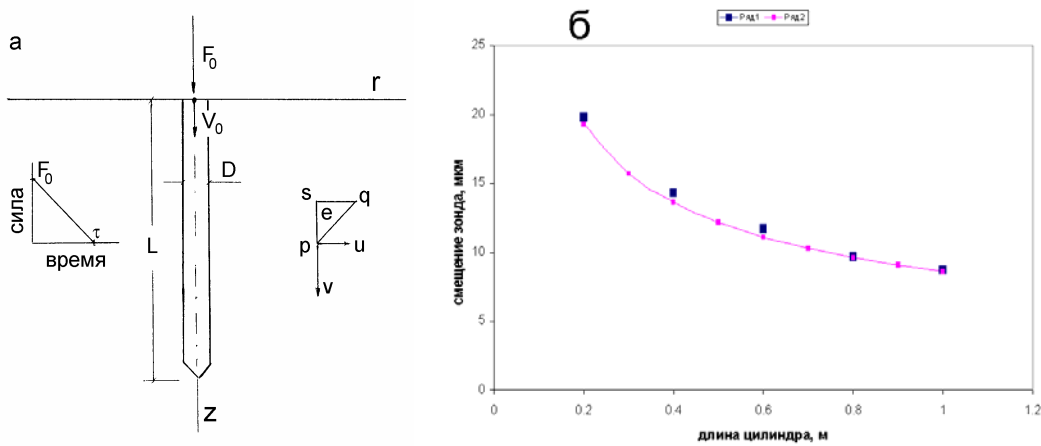


Рис.1. а - схема расчетной области. б - зависимость величины смещения цилиндра от его длины (ряд 1 – результаты моделирования, ряд 2 – соотношение (2)).

Конечно- элементный анализ.

Применение МКЭ предусматривает возможность решения задач о динамическом поведении упругих конструкций [7]. После дискретизации области на конечные элементы общее дифференциальное матричное уравнение имеет следующий вид:

$$K\delta + C \frac{\partial}{\partial t} \delta + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta + F = \mathbf{0} \quad (1).$$

F , δ – векторы узловых сил и смещений, K – матрица жесткости, M и C – матрицы масс и демпфирования. В случае осесимметричной постановки задачи при использовании трехузловых элементов, имеющих форму кольца с треугольным поперечным сечением (рис.1,а), элементный вклад в подматрицу k_{ps} матрицы жесткости, характеризующую взаимозависимость смещений (u, v) соседних узлов с номерами p, s , определяется следующим выражением:

$$k_{ps}^e = \frac{\pi \bar{r}}{2} \lambda \frac{|\Delta|}{\Delta^2} \begin{vmatrix} b_p b_s + c_p c_s + \alpha(b_p d_s + d_p b_s) + \beta c_p c_s & \alpha(b_p + d_p) c_s + \beta c_p b_s \\ \alpha c_p (b_s + d_s) + \beta b_p c_s & c_p c_s + \beta b_p b_s \end{vmatrix},$$

где параметры $\alpha = \frac{\nu}{1-\nu}$ и $\beta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$, $\lambda = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ - коэффициент Ламе

материала элемента (E – модуль Юнга, ν – отношение Пуассона). Геометрические параметры b_k, c_k, d_k – определяются координатами узлов элемента: $b_p = z_s - z_q$,

$$b_s = z_q - z_p, \quad c_p = r_q - r_s, \quad c_s = r_p - r_q, \quad d_p = \frac{r_q z_s - r_s z_q}{r} + b_p + \frac{c_p \bar{z}}{r},$$

$$d_s = \frac{r_p z_q - r_q z_p}{r} + b_s + \frac{c_s \bar{z}}{r}, \quad (\bar{r}, \bar{z} - \text{координаты центра треугольника } p, q, s).$$

Величина $\Delta = 1/2[(r_q - r_s)(z_p - z_s) - (z_q - z_s)(r_p - r_s)]$ - по модулю равна площади треугольного сечения элемента. Элементный вклад в подматрицу m_{ps} матрицы масс определяется следующим выражением:

$$m_{ps}^e = \rho \frac{\pi |\Delta|}{30} \begin{vmatrix} 2r_p + r_q + 2r_s + \delta_{ps}(4r_p + r_q) & 0 \\ 0 & 2r_p + r_q + 2r_s + \delta_{ps}(4r_p + r_q) \end{vmatrix},$$

где ρ – плотность материала элемента, δ_{ps} – символ Кронекера. Выражение для элементного вклада c_{ps} в матрицу демпфирования C имеет аналогичную форму (плотность ρ заменяется коэффициентом сопротивления вязкого типа μ материала элемента).

Таким образом при конечно- разностном решении уравнения (1) на каждом шаге по времени необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых ускорений $\ddot{\delta}_i$. Узловые смещения и скорости при реализации простейшей конечно- разностной схемы [8,9] определяются кинематическими уравнениями:

$$\delta(t + \frac{h}{2}) = \delta(t - \frac{h}{2}) + \dot{\delta}(t) \cdot h, \quad \delta(t + h) = \delta(t) + \dot{\delta}(t + \frac{h}{2}) \cdot h,$$

где h – величина интервала времени (шаг).

Для решения системы линейных алгебраических уравнений использовался итерационный метод последовательной верхней релаксации. Первое приближение при вычислении ускорений соответствовало из значениям на предыдущем шаге по времени. Диагональное преобладание матрицы масс обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса.

Начальные значения узловых перемещений при деформировании упругого полупространства силой F_0 определялись решением системы уравнений (1) при нулевых значениях скоростей и ускорений.

Результаты расчетов.

Квазистатический анализ. На рис.1,б приведены полученные в результате решения зависимости начального вертикального смещения верхней торцевой поверхности зонда V_0 от его длины L для диаметра зонда $D = 3$ см, силе $F_0 = 100$ Н и модуле упругости $E_s = 20$ МПа. Сравнение приложенной нагрузки с полученными в результате численного моделирования суммами узловых сил на контактной границе зонда с грунтовым массивом позволило оценить погрешность решения величиной 10%.

Применение принципов теории подобия позволяет обобщить полученные результаты на другие значения геометрических параметров погружного устройства. Сила приложенная к зонду и его смещение связаны уравнением $F_0 = Y V_0$, где Y – коэффициент упругости, зависящий от деформационных свойств грунта и геометрических параметров зонда. Смещения грунтового массива определяются смещением зонда. Если пропорционально увеличить длину и диаметр зонда, сохраняя

постоянным их отношение L/D , то распределение смещений в грунтовом массиве при фиксированном значении V_0 будет полностью подобным. Пропорциональное увеличение всех линейных размеров сопровождается пропорциональным уменьшением деформаций и напряжений. Сила, обеспечивающая заданное перемещение, соответственно пропорционально увеличивается. Анализ полученных в результате моделирования зависимостей смещения зонда от его длины показывает, что с большой точностью остается постоянной величина произведения $V_0 \sqrt{L}$. Предлагается следующее соотношение для определения смещения цилиндрического погружного зонда под действием приложенной вертикальной силы, согласующееся с результатами моделирования и следствиями теории подобия:

$$F_0 = \frac{\pi E_s}{(1 - \nu_s^2)} \sqrt{DL} \cdot V_0 \quad (2)$$

Предположение линейной зависимости коэффициента Y от величины $E_s / (1 - \nu_s^2)$ основано на решении Буссинеска задачи о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство [10]. Рис.1,б позволяет сравнить предложенное соотношение (сплошная линия) с результатами моделирования. Дополнительные расчеты, выполненные для значения диаметра зонда $D=20$ см и его длины $L=10$ и 5 м при значении приложенной нагрузки $F_0=100$ кН (моделировалась цилиндрическая железобетонная свая), подтвердили достоверность предложенного соотношения.

Таким образом, при отношениях длины зонда к его диаметру L/D в диапазоне 6,7 - 50 деформационные свойства грунта могут быть определены по экспериментально измеренному коэффициенту упругости Y с помощью следующего соотношения:

$$E_s / (1 - \nu_s^2) = Y / \pi \sqrt{DL} .$$

Анализ уравнения (2) показывает, что смещение погруженной в грунт сваи пропорционально приложенной нагрузке и обратно пропорционально корню квадратному из площади боковой поверхности $A=\pi DL$. Таким образом, увеличение площади контакта с грунтом снижает смещение свай под нагрузкой. Сваи прямоугольного и крестообразного поперечного сечения обладают в ряде случаев определенными преимуществами в сравнении с цилиндрическими сваями.

Результаты численного моделирования могут быть использованы для оценки частоты колебаний системы «среда- зонд». Воспользуемся формулой Рэлея для определения нижнего предела частоты колебаний упругой системы [11]:

$$w_0^2 \leq \frac{\int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV}{\int \rho u_i^2 dV} ,$$

где в числителе – запасенная в системе упругая энергия, а в знаменателе – аналог кинетической энергии системы, в котором скорости заменены смещениями. Выражая запасенную упругую энергию через работу внешней силы $F_0 V_0$ и разбив область интегрирования знаменателя на объем жесткого погружного зонда и грунта, получим следующее соотношение для определения наименьшей частоты колебаний:

$$w_0^2 = \frac{F_0 V_0}{M_f V_0^2 + \int \rho_s u_i^2 dV} = \frac{Y}{M_f + \frac{\int \rho_s u_i^2 dV}{V_0^2}} ,$$

где $M_f = \frac{\pi D^2}{4} L \rho_f$ - масса зонда ($\rho_f = 7,7$ г/см³ - плотность стали), а второе слагаемое в знаменателе является присоединенной массой.

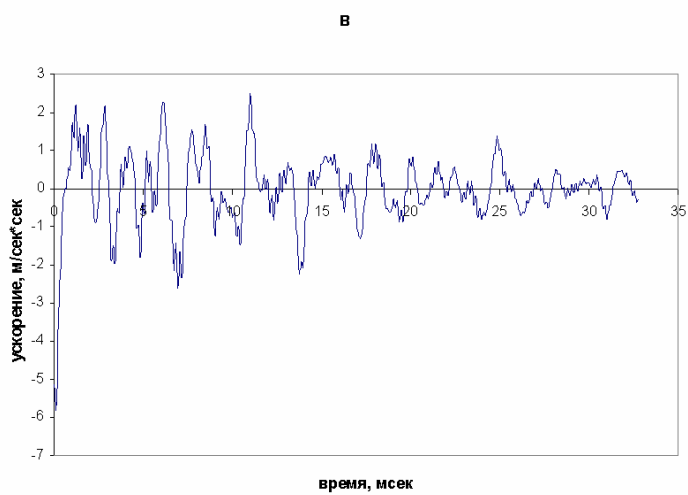
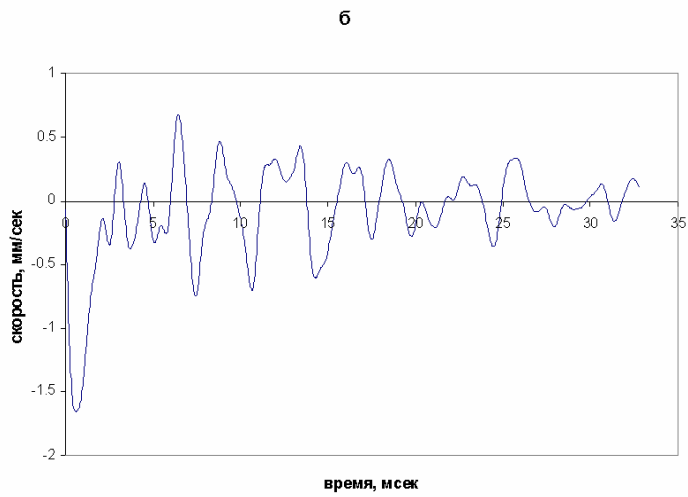
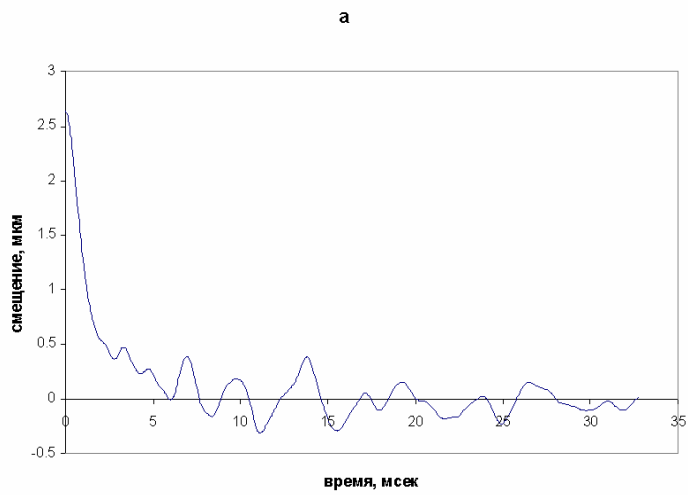


Рис.2. Смещение (а), скорость (б) и ускорение (в) зонда в процессе колебаний.

В табл. приведены полученные с помощью численного моделирования величины нижнего предела частоты колебаний $f_0 = \frac{w_0}{2\pi}$ при различной длине зонда (левое значение) и величины частоты при нулевом значении присоединенной массы

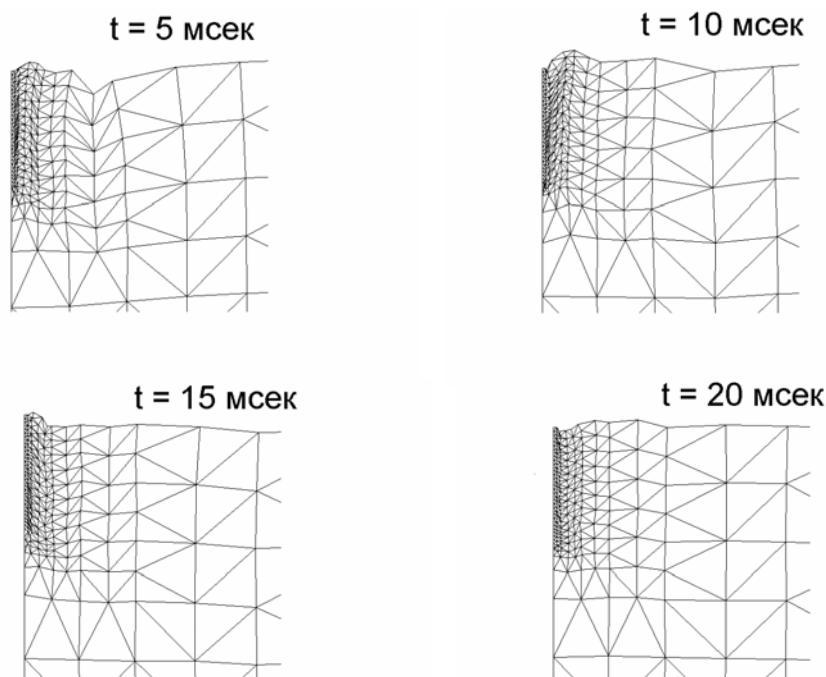


Рис.3. Сетки конечных элементов с учетом узловых смещений в процессе колебаний.

$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Y}{M_f}}$ (правое значение). При вычислениях плотность грунта принималась равной $1,7 \text{ г/см}^3$. Таким образом, квазистатический анализ позволяет оценить пределы значений собственных частот колебаний системы «среда- зонд».

Квазистатическая оценка собственной частоты зонда в грунте					Табл.
L, м	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f_0 , Гц	34-1632	27-1154	24-942	22-816	21-730

Динамический анализ. На рис.2 показаны полученные в результате моделирования зависимости смещения, скорости и ускорения зонда от времени после сброса приложенной нагрузки ($h=1.1$ мсек) для основного расчетного варианта. Низкочастотные колебания верхней торцевой поверхности зонда сопровождаются высокочастотными колебаниями малой амплитуды, связанными с распространением волны по стальному цилиндру. На рис.3 приведены сетки конечных элементов с учетом узловых смещений (в увеличенном масштабе) в процессе колебаний зонда.

Спектры ускорения зонда при различных деформационных свойствах грунта показаны на рис.4. С уменьшением модуля упругости среды снижаются собственные частоты системы «среда- зонд». Значения собственных частот находятся в пределах квазистатической оценки. Рис.5 иллюстрирует линейную зависимость квадрата частоты f_m , соответствующей максимальной амплитуде в спектре ускорения зонда от модуля упругости среды. Данный график может быть использован для определения

деформационных свойств грунта по результатам экспериментальных измерений ускорения погружного устройства в процессе колебаний.

Рассмотрим причины различий деформационных свойств геоматериалов, полученных в статических и динамических испытаниях. Скорость нагружения

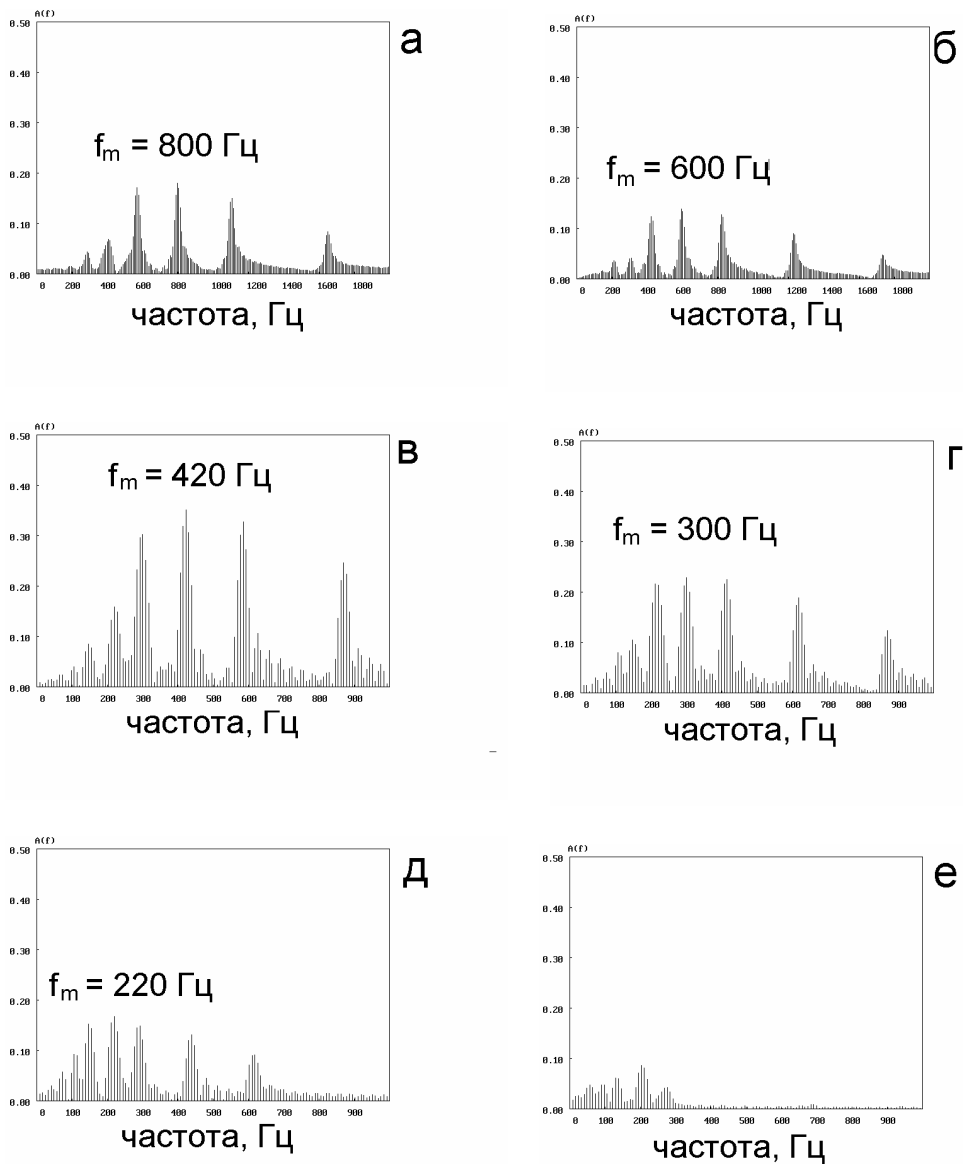


Рис.4. Спектры ускорения зонда при модуле упругости грунта 72, 40, 20, 10, 5 и 1 МПа (а,б,в,г,д,е, соответственно).

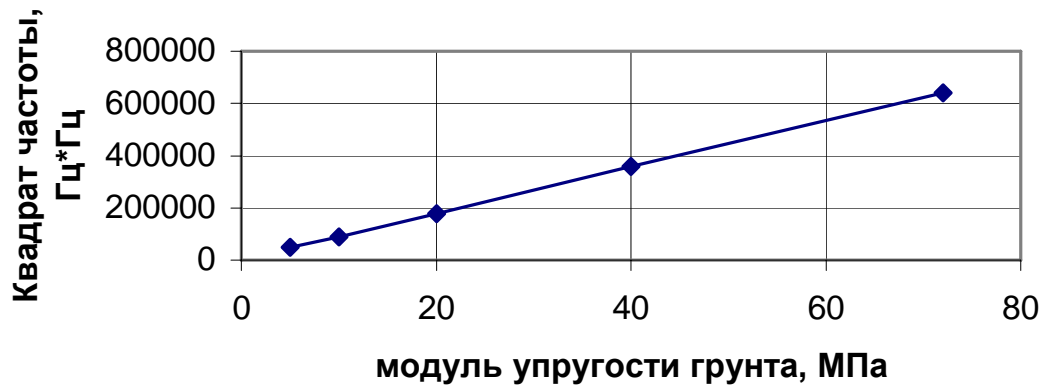


Рис.5. Зависимость квадрата частоты, соответствующей максимуму в спектре ускорения зонда, от модуля упругости грунта.

определяет термодинамический процесс деформирования. Статическое испытание является изотермическим процессом, динамическое – адиабатическим. Модули упругости и отношения Пуассона связаны следующими соотношениями [12]:

$$E_{ad} = \frac{E_{iz}}{1-x}, \quad \nu_{ad} = \frac{\nu_{iz} + x}{1-x},$$

где $x = \frac{E_{iz} T \gamma^2}{9W_p}$, T – абсолютная температура, γ – коэффициент теплового расширения,

W_p – теплоемкость при постоянном давлении. Величина x для большинства геоматериалов порядка 10^{-3} . Следовательно, наблюдаемое на практике различие деформационных свойств, полученных в статических и динамических испытаниях, обусловлено не скоростью нагружения. Динамический модуль упругости определяется по результатам геофизического определения скорости распространения звуковой волны. Величины деформаций при статических испытаниях на несколько порядков превышают акустические возмущения среды. Таким образом, различие деформационных свойств в статических и динамических испытаниях связано со значительной разницей экспериментальных величин деформаций и напряжений.

Выводы.

1. Смещение погруженного в грунт цилиндра под нагрузкой при отношениях длины к диаметру в пределах 6.7-50 определяется с помощью уравнения (2).

2. Модуль упругости грунта можно оценивать по частоте собственных колебаний погруженного в грунт цилиндрического зонда после быстрого сброса приложенной нагрузки. В частности, в случае сплошного стального цилиндра диаметром 3 см и длиной 50 см модуль упругости грунта (в интервале значений 5-72 МПа) определяется с помощью соотношения: $E_s(\text{Па}) = 112.5 f_m^2(\text{Гц})$, где f_m – частота собственных колебаний системы «среда- зонд», соответствующая максимальной амплитуде в спектре ускорения зонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Л.В., Тюреходжаев А.Н. Поведение под нагрузкой упругого стержня, заглубленного в грунт // Проблемы механики горных пород. Алма-Ата: Наука, 1966.
2. Курленя М.В., Петров В.Е., Попов С.Н., Ткач Х.Б. О применении акустических волноводов для измерения напряжений в грунтах // ФТПРПИ, №1, 1997.

3. **Белобородов В.Н., Глотова Т.Г.** Метод оценки упругих свойств грунта // ФТПРПИ, №6, 1998.
4. **Шемякин Е.И.** Динамические задачи теории упругости и пластичности. Новосибирск: Новосибирский Государственный Университет, 1968.
5. **Фадеев А.Б.** Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987.
6. **Хорев И.Е., Зелепугин С.А., Распопов В.В.** О разрушении материалов и конструкций в проблеме высокоскоростных ударных явлений // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике (тезисы докладов 5 международной конференции).- Новосибирск, 2000.
7. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.
8. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** Фейнмановские лекции по физике, вып.1. – М.: Мир, 1977.
9. **Годунов С.К., Рябенький В.С.** Разностные схемы. – М.: Наука, 1977.
10. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. – М.: Наука, 1975.
11. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела.- М.: Наука, 1979.
12. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория упругости.- М.: Наука, 1987.