

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВАРИАНТА КАМЕРНО-ЦЕЛИКОВОЙ СИСТЕМЫ РАЗРАБОТКИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

К.т.н. Болтенгаген И.Л.

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск, Россия

АННОТАЦИЯ: Изложены результаты теоретических исследований влияния горных работ на напряженно-деформированное состояние массива вмещающих пород при выемке запасов пологих залежей по камерно-целиковой схеме. Получены расчетные формулы для оценок смещений на контуре камер при различных значениях технологических параметров.

Введение

Настоящее время характеризуется широким применением методов компьютерного моделирования напряженно - деформированного состояния массива горных пород в окрестности выработок. При этом, несмотря на ограниченные возможности, аналитические методы, позволяющие представить напряжения, деформации и смещения в массиве горных пород в виде алгебраических зависимостей от параметров, определяющих геомеханические условия, не утрачивают своего значения по следующим причинам. Во-первых, исследование специально подобранной упрощенной модельной задачи позволяет представить характер деформирования массива в исходной сложной горнотехнической ситуации. Во-вторых, аналитические решения необходимы в тестовых расчетах (вычислительных экспериментах, выполняемых для выявления возможных ошибок в компьютерных программах, реализующих новые методы математического моделирования).

Фурье-анализ является одним из наиболее эффективных методов математической физики. Последовательное чередование пар «камера-целик» позволяет использовать этот метод для оценки напряженно-деформированного состояния массива горных пород при геомеханическом анализе вариантов камерно-целиковой системы разработки пологих залежей.

Частные решения плоской задачи теории упругости

Рассмотрим плоскую постановку задачи теории упругости [1]. Функция напряжений $\varphi(x,y)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Для функции напряжений вида $\varphi(x,y) = \sin kx f(y)$ оно приводит к следующему дифференциальному уравнению

$$k^4 f(y) - 2k^2 f(y)'' + f(y)'''' = 0,$$

Его общее решение имеет вид

$$f(y) = A \operatorname{ch} ky + B \operatorname{sh} ky + C y \operatorname{ch} ky + D y \operatorname{sh} ky.$$

Функция напряжений определяется формулой

$$\varphi(x,y) = \sin kx f(y) = \sin kx (A \operatorname{ch} ky + B \operatorname{sh} ky + C y \operatorname{ch} ky + D y \operatorname{sh} ky),$$

а компоненты напряжений $\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ определяются уравнениями [1]

$$\sigma_x = \sin kx [A k^2 \operatorname{ch} ky + B k^2 \operatorname{sh} ky + C k (2 \operatorname{sh} ky + ky \operatorname{ch} ky) + D k (2 \operatorname{ch} ky + ky \operatorname{sh} ky)],$$

$$\sigma_y = -k^2 \sin kx (A \operatorname{ch} ky + B \operatorname{sh} ky + C y \operatorname{ch} ky + D y \operatorname{sh} ky),$$

$$\tau_{xy} = -k \cos kx [A k \operatorname{sh} ky + B k \operatorname{ch} ky + C (\operatorname{ch} ky + ky \operatorname{sh} ky) + D k (\operatorname{sh} ky + ky \operatorname{ch} ky)].$$

Рассмотрим частный случай данного решения, удовлетворяющий условию равенства нулю напряжений на бесконечном удалении ($y \rightarrow \infty$) от координатной оси X . С помощью второго из приведенных уравнений получим формулу

$$\sigma_y = -k^2 \operatorname{sink}x [(A+B)\exp(ky) + (A-B)\exp(-ky)] + (C+D)y\exp(ky) + (C-D)y\exp(-ky)]/2.$$

Условие ($\sigma_y|_{y \rightarrow \infty} = 0$) приводит к следующим соотношениям между константами: $B = -A$ и $D = -C$. Компоненты напряжений в данном случае определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{sink}x (k^2 A - 2kC + k^2 Cy)\exp(-ky)], \\ \sigma_y &= -k^2 \operatorname{sink}x (A + Cy)\exp(-ky)], \\ \tau_{xy} &= -k \operatorname{sink}x (-kA + C - kCy)\exp(-ky)]. \end{aligned}$$

Аналогично поступаем в случае функции напряжений вида $\varphi(x,y) = \operatorname{cos}kx \cdot g(y)$. Компоненты напряжений, удовлетворяющие условию ($\sigma_y|_{y \rightarrow \infty} = 0$), определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{cos}kx (k^2 P - 2kR + k^2 Ry)\exp(-ky)], \\ \sigma_y &= -k^2 \operatorname{cos}kx (P + Ry)\exp(-ky)], \\ \tau_{xy} &= k \operatorname{cos}kx (-kP + R - kRy)\exp(-ky)]. \end{aligned}$$

Приведенные формулы позволяют описать распределение напряжений в упругом полупространстве для любого периодического распределения нагрузок на его границе ($y=0$) при нулевом главном векторе поверхностных усилий. В частном случае нулевых касательных на границе полупространства $C = kA$ и $R = kP$, и компоненты напряжений для решений, пропорциональных синусу kx , определяются с помощью уравнений

$$\sigma_x = -k^2 A \operatorname{sink}x (1 - ky)\exp(-ky)], \sigma_y = -k^2 A \operatorname{sink}x (1 + ky)\exp(-ky)], \tau_{xy} = k^2 A \operatorname{sink}x ky \exp(-ky).$$

Соответственно, для решений, пропорциональных косинусу kx ,

$$\sigma_x = -k^2 P \operatorname{cos}kx (1 - ky)\exp(-ky)], \sigma_y = -k^2 P \operatorname{cos}kx (1 + ky)\exp(-ky)], \tau_{xy} = -k^2 P \operatorname{cos}kx ky \exp(-ky).$$

Произведение k^2 на постоянные A или P без потери общности можно считать константой. Вводя новые постоянные $S = -k^2 A$ и $Q = -k^2 P$, получим следующие частные решения задачи теории упругости в плоской постановке

$$\sigma_x = S \operatorname{sink}x (1 - ky)\exp(-ky)], \sigma_y = S \operatorname{sink}x (1 + ky)\exp(-ky)], \tau_{xy} = -S \operatorname{sink}x ky \exp(-ky) \quad (1)$$

и

$$\sigma_x = Q \operatorname{cos}kx (1 - ky)\exp(-ky)], \sigma_y = Q \operatorname{cos}kx (1 + ky)\exp(-ky)], \tau_{xy} = Q \operatorname{cos}kx ky \exp(-ky), \quad (2)$$

удовлетворяющие условиям отсутствия касательной компоненты вектора поверхностных усилий на границе полупространства и отсутствию напряжений на бесконечном удалении от нее.

Камерно – целиковая система разработки

Камерно-целиковая разработка является одним из наиболее древних способов добычи запасов полезных ископаемых горизонтальной или пологой залежи [2]. Подземные сооружения из камер, между которыми размещены целики (отдельные колонны или сплошные стены), имеют простую конструкцию и не требуют многих подготовительных выработок. Варианты технологии с закладкой отработанных камер и последующей выемкой рудных запасов в ленточных целиках широко применяются в современной горной практике на месторождениях Сибири [3,4]. В этих случаях отношение размеров камер и целиков, как правило, равно отношению малых натуральных чисел. Данное обстоятельство является следствием того, что последовательная выемка запасов полезных ископаемых осуществляется выемочными единицами, кратными ширине минимальных целиков, отработываемых на заключительной стадии разработки. Залежь разбивается на выемочные единицы, объединенные в блоки, включающие 2,3,4,5 или 6 выемочных единиц. Отработка первичных камер блоков завершается формированием камер и целиков. В частности, разбивая залежь на блоки, включающие две выемочные единицы, после первичной отработки камерами, разделенными целиками шириной, равными размеру выемочной единицы, формируется

горнотехническая ситуация, в которой размеры целиков и камер равны. Вторичная отработка блоков, сопровождающаяся выемкой запасов в целиках, завершает разработку залежи. При разбиении залежи на блоки, содержащие три выемочные единицы, после первичной отработки блоков формируется горнотехническая ситуация, в которой размеры целиков в два раза превышают размеры камер. Вторичная разработка блоков приводит к горнотехнической ситуации, в которой размеры целиков в два раза меньше размеров камер. Разработку запасов в блоках на третьем этапе завершает выемка оставшихся целиков. При разбиении залежи на блоки, содержащие четыре выемочные единицы, после первичной отработки блоков формируется горнотехническая ситуация, в которой размеры целиков втрое превышают размеры камер. Возможны два варианта вторичной выемки. В обоих случаях вторичная разработка приводит к горнотехнической ситуации, в которой размеры камер и целиков равны ширине выемочной единицы. В первом варианте вторичной отработки вынимаются запасы выемочной единицы, расположенной в центре сформированного целика. В данном случае фактически складывается ситуация, аналогичная рассмотренному сначала разбиению блоков на две выемочные единицы. Третичная разработка блоков – выемка оставшихся целиков завершает в этом случае процесс разработки залежи. Во втором варианте вторичной отработки блоков вынимаются запасы выемочной единицы, расположенной вприсечку к уже созданным камерам. Тогда вторичная разработка блоков завершается формированием горнотехнической ситуации, в которой размеры камер и целиков равны и вдвое больше ширины выемочной единицы. Третичная разработка блоков приводит к горнотехнической ситуации, в которой размер камер втрое превышает размер целиков, равный ширине выемочной единицы. Четвертичная выемка запасов в оставшихся целиках блоков завершает разработку залежи. Увеличение количества выемочных единиц в каждом блоке приводит к росту возможных вариантов ведения горных работ. Все горнотехнические ситуации, обусловленные применением камерно-целиковой системы разработки с закладкой, характеризуются тем, что отношение размеров камер и целиков равны рациональным числам с небольшими (как правило, не превышающими 5) натуральными величинами числителя и знаменателя дроби. Возможны варианты периодической картины состояния горных работ, в которых размеры целиков не одинаковы, а чередуются, например, через один. В данных случаях подход к анализу нагрузок аналогичен предлагаемому способу расчета с той разницей, что пространственный период содержит ряд камер и целиков с разными размерами.

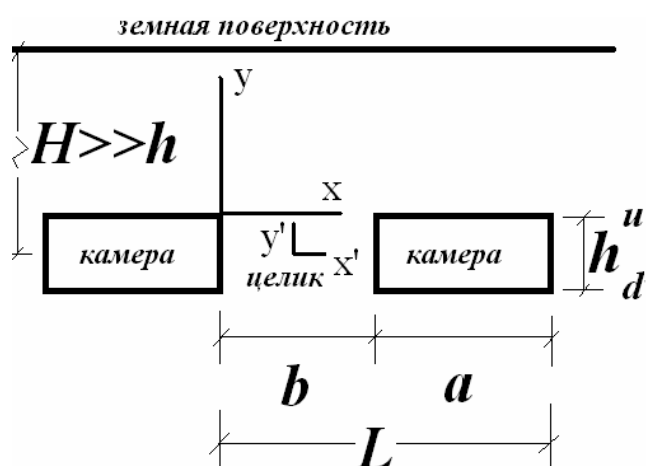


Рис.1. Часть системы чередующихся пар «камера-целик».

Рассмотрим классический вариант камерно- целиковой системы разработки пологой залежи мощности h на глубине H ($h \ll H$) с ленточными целиками и камерами прямоугольной формы высотой h и шириной b и a соответственно. Рис.1 иллюстрирует участок горных работ, содержащий две камеры и целик из полной системы чередующихся пар «камера-целик». Пространственным периодом является суммарная ширина камеры и целика L . Изменение начального напряженного состояния под- и надработанного массивов вмещающих пород

вследствие ведения горных работ можно оценить следующим образом. Разгрузка массива под и над камерами происходит из-за снятия вертикальной нагрузки γH , распределенной по горизонтальным поверхностям почвы и кровли формируемых камер до момента их создания (γ – удельный вес налегающей толщи пород). Абсолютная величина вертикальной пригрузки целиков может быть оценена по формуле Шевякова $\sigma = \gamma H a / b$ из условия равновесия $\sigma b = \gamma H a$. Возмущение исходного напряженного состояния массива вмещающих пород горными работами является результатом воздействия поверхностных усилий, распределенных на контактных границах рудного тела с вмещающими породами. В случае больших (в сравнении с мощностью залежи и размерами целиков и камер) глубин массив налегающих пород можно считать деформируемым полупространством, как и массив нижележащих горных пород. Изменения напряженного состояния пород, расположенных под и над залежью, симметричны. Пренебрежем в первом приближении касательными напряжениями на горизонтальных контактных границах целиков с вмещающими породами. Влиянием земной поверхности на глубине, значительно превышающей мощность залежи и пролет ее отработки, также можно пренебречь. Влияние горных работ на напряженное состояние пород оценивается с помощью периодического ступенчатого распределения давления на нижней границе (горизонтальная линия u по кровле пласта) верхнего и на верхней границе (горизонтальная линия d по почве пласта) нижнего полупространств, показанных на рис.1 (сжатие положительно):

$$\sigma_n(x) = \begin{cases} \gamma H \frac{a}{b}, & iL \leq x \leq b + iL \\ -\gamma H, & b + iL \leq x \leq b + a + iL \end{cases},$$

где i – целое число, соответствующее номеру блока, содержащему пару «камера-целик» (нулевое значение i соответствует показанной на рис.1 паре справа от начала отчета, отрицательные и положительные значения i соответствуют блокам, расположенным соответственно слева и справа от нулевой пары).

Разложение в ряд Фурье ступенчатой нагрузки на упругое полупространство

Любая периодическая самоуравновешенная распределенная нагрузка $\sigma_n(x) = \sigma_n(x+L)$ на границе полупространства ($y=0$) может быть представлена в виде

$$\sigma_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{2\pi m}{L} x + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{2\pi m}{L} x,$$

где L – пространственный период, а коэффициенты A_m и B_m вычисляются по формулам [5]

$$A_m = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} \sigma_n(x) \sin \frac{2\pi m x}{L} dx, \quad B_m = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} \sigma_n(x) \cos \frac{2\pi m x}{L} dx.$$

Коэффициенты Фурье для ступенчатой нагрузки определяются с помощью уравнений:

$$A_m = \frac{1}{\pi n} \gamma H \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi m b}{L}\right) \quad \text{и} \quad B_m = \frac{1}{\pi n} \gamma H \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sin \frac{2\pi m b}{L}. \quad (3)$$

Полученное разложение нагрузки, приложенной на границе полупространства, показывает, что каждый из коэффициентов A_m , B_m рядов Фурье аналогичен коэффициентам S и Q в уравнениях (1) и (2), определяющих напряжения в полупространстве. Выражение $2\pi m/L$ в рядах Фурье аналогично параметру k . В соответствии с принципом суперпозиции, справедливым для линейной теории упругости, общее решение является суммой, каждое из слагаемых которой определяется соответствующим членом ряда Фурье. Напряжения в упругом полупространстве, деформируемом распределенной на ее поверхности периодической нагрузкой, определяются с помощью следующих уравнений

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(1 - \frac{2\pi m}{L} y\right) \sin \frac{2\pi m x}{L} \exp\left(-\frac{2\pi m}{L} y\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left(1 - \frac{2\pi m}{L} y\right) \cos \frac{2\pi m x}{L} \exp\left(-\frac{2\pi m}{L} y\right),$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(1 + \frac{2\pi m}{L} y\right) \sin \frac{2\pi m x}{L} \exp\left(-\frac{2\pi m}{L} y\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left(1 + \frac{2\pi m}{L} y\right) \cos \frac{2\pi m x}{L} \exp\left(-\frac{2\pi m}{L} y\right),$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{2\pi m}{L} y \sin \frac{2\pi m x}{L} \exp\left(-\frac{2\pi m}{L} y\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{2\pi m}{L} y \cos \frac{2\pi m x}{L} \exp\left(-\frac{2\pi m}{L} y\right),$$

Подставляя в полученные уравнения коэффициенты разложения в ряд Фурье (3) и вводя обозначение $k_m = 2\pi m/L$, получим следующие выражения для вычисления компонент напряжений*

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\gamma H}{\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{(1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x\} (1 - k_m y) \exp(-k_m y),$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{\gamma H}{\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{(1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x\} (1 + k_m y) \exp(-k_m y),$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\gamma H}{\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{-(1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x\} k_m y \exp(-k_m y).$$

Деформации массива рассчитываются по закону Гука. В частности, вертикальная деформация определяется следующими соотношениями (предполагается условие обобщенной плоской деформации для дополнительного напряженного состояния массива горных пород)

$$\varepsilon_y = \frac{\gamma H}{E\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{(1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x\} \exp(-k_m y) (1 + \nu) (1 - 2\nu + k_m y)$$

Вертикальное смещение V_y получим с помощью последующего интегрирования деформации [6] с точностью до постоянного слагаемого V_0

$$V_y = -\frac{\gamma H}{2E\pi^2} L \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \{(1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x\} (1 + \nu) (2 - 2\nu + k_m y) e^{-k_m y} \quad (4).$$

Горизонтальная деформация определяется следующим уравнением

$$\varepsilon_x = \frac{\gamma H}{E\pi} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{(1 - \cos k_m b) \sin k_m x + \sin k_m b \cos k_m x\} \exp(-k_m y) (1 + \nu) (1 - 2\nu - k_m y) .$$

Отметим экспоненциальное уменьшение величин напряжений с удалением от границы полупространства. На рис.2 показаны распределения вертикальных напряжений на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от контакта рудного тела с вмещающими породами, для разного количества членов ряда Фурье при одинаковых размерах целиков и камер ($a=b=L/2$). Рис.2,а иллюстрирует Фурье-разложение ступенчатой нагрузки на контактной границе u для первых 6 гармоник (3 нечетных членов ряда, гармоники 1,3 и 5). Рис.2,б иллюстрирует Фурье-разложение ступенчатой нагрузки на контактной границе u при суммировании первых членов ряда Фурье до 7 и 9 гармоники включительно. Номер гармоники показан у соответствующих линий. Пунктирными линиями показаны гармоники 3 и 7. На рис.2,в и рис.2,г показаны распределения вертикальных напряжений на горизонтальных линиях,

* Под напряжениями, деформациями и смещениями понимаются их дополнительные значения, обусловленные выемкой запасов полезного ископаемого. Результирующие (полные) величины напряжений и деформаций вычисляются суперпозицией (суммой) начального и дополнительного напряженно-деформированного состояния массива горных пород. Полные величины смещений не имеют физического смысла из-за практической невозможности воспроизвести историю создания исходного поля смещений, т.к. формирование начального поля напряжений в значительной степени обусловлено физической нелинейностью при деформировании пород в длительном геологическом процессе создания литосферы. Вычисленные с помощью исходных напряжений по закону Гука начальные деформации также отражают лишь упругую составляющую тензора деформаций. Принцип суперпозиции напряжений является следствием линейности уравнений равновесия.

расположенных соответственно на расстоянии $0.1L$ и $0.2L$ от контакта для первых гармоник. Если для адекватного описания ступенчатой нагрузки на контакте недостаточно даже 10 гармоник, то уже на расстоянии $0.1L$ от контакта три первых члена ряда Фурье (гармоники 1,3 и 5) позволяют получить очень хорошую оценку величин напряжений. Визуально ее практически невозможно отличить от истинного значения, полученного после суммирования 100 членов Фурье-разложения (жирная сплошная кривая). На расстоянии $0.2L$ от контакта даже первого члена ряда Фурье вполне достаточно для удовлетворительных оценок величин напряжений. Данное обстоятельство является следствием экспоненциального множителя $\exp(-2\pi ty/L)$: с возрастанием y гармоники с большими показателями m затухают значительно быстрее гармоник с меньшими показателями m . Рис.3,а иллюстрирует уменьшение влияния разработки с удалением от кровли и почвы залежи во вмещающие породы. Показаны изменения напряженного состояния массива вмещающих пород на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от контакта, при одинаковых размерах целиков и камер ($a=b=L/2$). Уже на расстоянии от контакта, равном ширине целика ($0.5L$), изменения напряжений вследствие ведения горных работ не превышают 25% от уровня гравитационного поля γH .

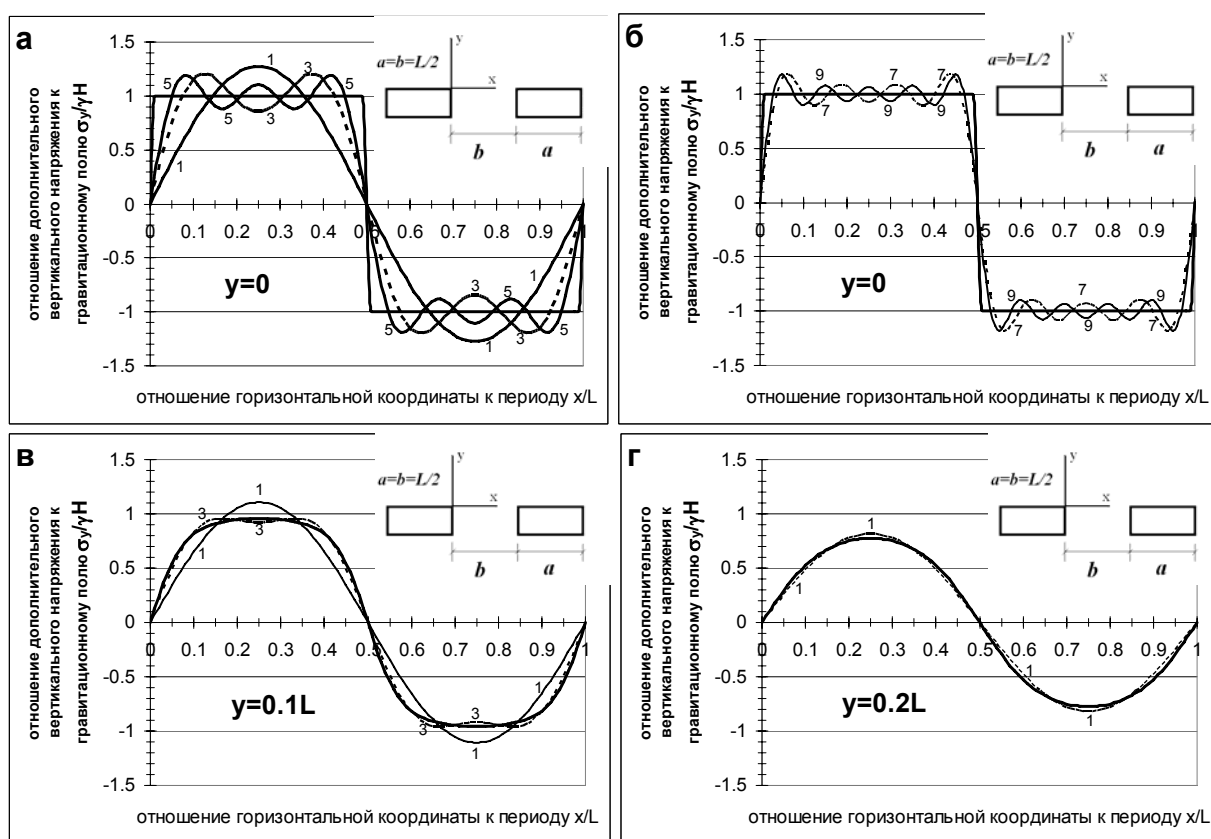


Рис.2. Распределение дополнительных вертикальных напряжений на горизонтальных линиях, расположенных на расстоянии 0 (а,б), $0.1L$ (в) и $0.2L$ (г) от кровли рудного тела при различном числе членов ряда Фурье (количество суммируемых первых гармоник указано у соответствующих кривых) для одинаковых размеров камер и целиков ($a=b=L/2$).

Вертикальное смещение массива вмещающих пород в уравнении (4) определяется с точностью до константы интегрирования V_0 , соответствующей смещению начала координат. Для иллюстраций уменьшения смещения массива горных пород с удалением от выработок примем V_0 равным нулю, что соответствует нулевым смещениям на горизонтальных линиях u и d в точках сопряжения целиков и камер при равных их размерах. Знак смещения соответствует ориентации оси ординат на рис.1. Рис.4 показывает смещения массива горных пород на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от контакта рудного тела с вмещающими породами, для разного количества членов ряда Фурье при одинаковых размерах целиков и камер ($a=b=L/2$). Рис.4,а иллюстрирует Фурье-разложение ступенчатой нагрузки на контактной границе

и для первых 3 гармоник (2 нечетных членов ряда). На рис.4,б и рис.4,в показаны распределения смещений на горизонтальных линиях, расположенных соответственно на расстоянии $0.1L$ и $0.2L$ от контакта для первых гармоник. В отличие от напряжений для адекватного описания смещений на контакте достаточно всего 3 гармоник. На расстоянии $0.1L$ и $0.2L$ от контакта даже первый член ряда Фурье (гармоника 1) обеспечивает вполне удовлетворительную оценку смещений. Визуально она не отличается от истинного значения, полученного после суммирования 100 членов Фурье-разложения (жирная сплошная кривая). Данный факт является следствием как экспоненциальной зависимости $\exp(-2\pi y/L)$, так и тем обстоятельством, что члены ряда Фурье для смещений обратно пропорциональны m^2 (коэффициенты Фурье-разложения напряжений обратно пропорциональны номеру гармоники m). В расчете смещений гармоники с большими показателями m вносят гораздо меньший вклад в сумму ряда Фурье, чем соответствующие гармоники при вычислении напряжений. Рис.3,б иллюстрирует смещения массива вмещающих пород на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от контакта пласта с вмещающими породами, при одинаковых размерах целиков и камер ($a=b=L/2$). Уже на равном ширине целика расстоянии от контакта ($0.5L$) смещения вследствие ведения горных работ не превышают 15% от уровня максимальных перемещений на контуре камер.

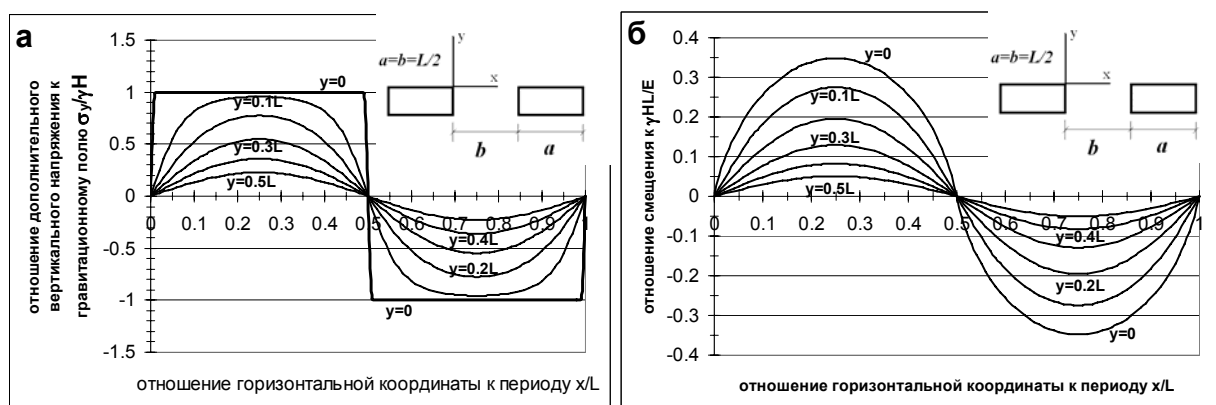


Рис.3. Распределение дополнительных вертикальных напряжений (а) и смещений (б) на горизонтальных линиях, расположенных на различных расстояниях от кровли рудного тела для одинаковых размеров камер и целиков ($a=b=L/2$, $\nu=0.25$).

Как уже отмечалось выше, смещения, рассчитываемые по формуле (4) и иллюстрируемые графиками на рис.4,а,б,в и рис.3,б, определены с точностью до постоянной интегрирования V_0 , соответствующей вертикальному смещению начала отсчета системы координат (x,y) , показанной на рис.1. В ряде случаев более удобной является система отсчета (x',y') , начало которой находится в центре целика. В этом случае графики смещаются на величину V_0 , рассчитываемую с помощью анализа деформирования целика. Если нагрузка на целик постоянна, то одинаковы и смещения на его верхней и нижней границах. Это несоответствие распределению смещения на рис.4,а – следствие допущений в анализе. Следующим приближением для количественного анализа может быть сумма постоянной и параболической нагрузки на целик [1]. Константа интегрирования V_0 определяется из условия равенства смещений в центре контакта целика с вмещающими породами (или из условия минимальной разности смещений по контакту) при согласовании решений для упругого полупространства с периодическим распределением нагрузки и для целиков.

Экспериментальные измерения смещений в шахтных условиях всегда выполняются относительно какой либо опорной точки в массиве. Одна из возможных схем измерения для исследования характера деформирования массива и его свойств основана на сравнении величин смещения кровли в центре камеры и вблизи ее стенки. После алгебраических и тригонометрических преобразований уравнения (4) получим следующее уравнение для оценки разности смещений кровли камеры в ее центре и в углу на сопряжении целика и камеры

$$\Delta V_y = \frac{\gamma H(1-\nu^2)a}{E} \frac{2}{\pi^2 \xi(1-\xi)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi m \xi (1 - \cos \pi m \xi)}{m^2},$$

где $\xi = a/L$ – отношение ширины камеры к пространственному периоду (ширине блока), E, ν – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона массива горных пород. Первый дробный множитель в уравнении равен смещению кровли выработки кругового поперечного сечения диаметром a в условиях вертикального одноосного сжатия массива напряжением γH . Произведение второго дробного множителя и суммы ряда является безразмерным скаляром $c(\xi)$, величина которого зависит от соотношения размеров целиков и камер, характеризуемого параметром ξ . На рис.4,г приведен график зависимости числового коэффициента $c(\xi)$

$$c(\xi) = \frac{2}{\pi^2 \xi(1-\xi)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi m \xi (1 - \cos \pi m \xi)}{m^2}.$$

Разность смещений кровли камеры в ее центре и в угле рассчитывается по формуле

$$\Delta V_y = \frac{\gamma H(1-\nu^2)a}{E} c(\xi).$$

Данное уравнение может быть использовано и для оценки деформационных свойств массива горных пород по результатам экспериментальных измерений смещений кровли камер.

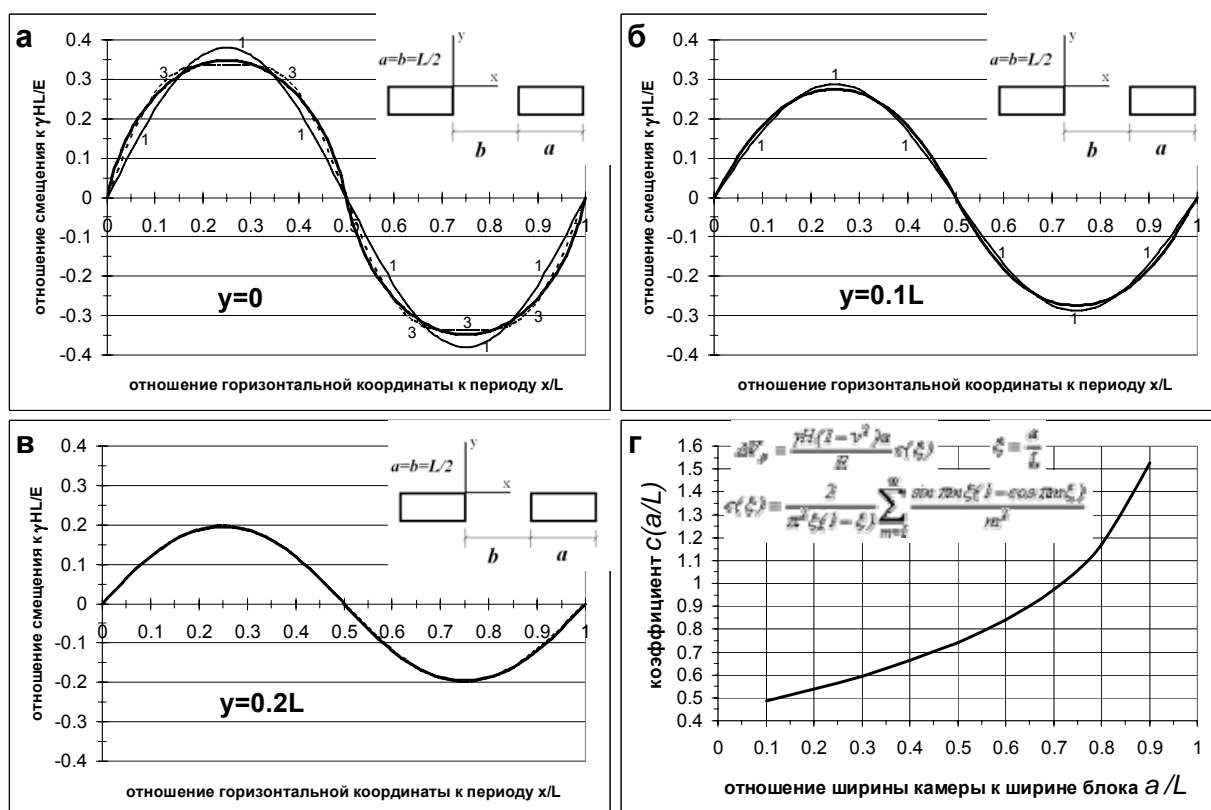


Рис.4. Распределение смещений на горизонтальных линиях, расположенных на расстоянии 0 (а), 0.1L (б) и 0.2L (в) от кровли рудного тела при различном числе членов ряда Фурье-разложения (количество суммируемых первых гармоник указано у соответствующих кривых) для одинаковых размеров камер и целиков ($a=b=L/2, \nu=0.25$). Зависимость коэффициента $c(\xi)$ от размеров камеры (г).

Конвергенция стенок камеры (разность горизонтальных смещений точек в серединах бортов) определяется с помощью уравнения

$$\Delta U_x = \frac{\gamma H(1-\nu^2)a}{E} \left(\lambda \frac{b}{a} + \frac{\nu}{1-\nu} \right),$$

где λ – коэффициент бокового отпора (отношение горизонтальной компоненты исходного поля напряжений к вертикальной компоненте, обусловленной весом налегающей толщи пород).

Экспериментальные измерения разности вертикальных смещений кровли камеры в ее центре и у борта ΔV_y и горизонтальной конвергенции стенок камеры ΔU_x могут быть использованы для оценки коэффициента бокового отпора λ по формуле

$$\lambda = \frac{a}{b} \left(\frac{l}{c(\xi)} \frac{\Delta U_x}{\Delta V_y} - \frac{\nu}{1-\nu} \right).$$

Вывод

Одним из эффективных способов получения расчетных формул для практической оценки величин напряжений, деформаций и смещений при различных значениях технологических параметров камерно-целиковой системы разработки является метод Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. –М.: Наука, 1975. С.70-72. С.269-272.
2. **Агрикола Г.** О горном деле и металлургии, -М.: Издательство АН СССР, 1962. С.213.
3. **Мамонов А.Ф.** Взаимодействие вмещающих пород с закладочным массивом на россыпных шахтах севера. –Якутск: Издательство ЯНЦ СО РАН, 1999. С.58-114.
4. **Барышников В.Д и др.** Геомеханический анализ напряженного состояния массива горных пород при отработке опытно-промышленного блока рудника «Интернациональный» // Труды Международной конференции «Проблемы и перспективы развития горных наук», посвященной 60-летию образования Горно-геологического института СО АН СССР – Института горного дела РАН, 1-5 ноября 2004г., Новосибирск. Т.1 «Геомеханика». Новосибирск: ИГД СО РАН, 2005. С.103.
5. **Крауфорд Ф.** Волны. –М.: Наука, 1976. С.71.
6. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. –М.: Наука, 1978. С. 116 (интегралы 565.1 и 567.1).