УДК 622.831

Оценка критической нагрузки на механическую систему методом сетевого программирования

к.т.н. И.Л.Болтенгаген, д.т.н. А.С.Кузнецов
Институт горного дела СО РАН, Новосибирск

АННОТАЦИЯ Предложено уравнение для плотности энергии деформации. Получено аналитическое решение задачи о максимальном потоке энергии в механической системе, сохраняющем устойчивость ее конструктивных элементов.

1. Уравнение сохранения энергии

Математическое решение геомеханических задач, как правило, сводится к решению следующей системы из 15 дифференциальных и алгебраических уравнений: 3 уравнения равновесия (уравнения Ньютона), 6 определяющих соотношений (уравнение состояния среды, в частности, закон Гука) и 6 кинематических уравнений, связывающих тензор деформаций с вектором перемещений. При заданных граничных и начальных условиях находят 15 функций координат и времени (6 компонент тензора деформаций, 6 компонент тензора напряжений и 3 компоненты вектора перемещений). Решение удовлетворяет закону сохранения энергии автоматически, т.к. уравнения равновесия являются следствием минимума функционала энергии. Характерной особенностью геомеханической среды является недостаток (часто и полное отсутствие) достоверной информации о ее механическом состоянии (например, о прочностных и деформационных свойствах пород и тектонических нарушений, а также напряжениях в горном массиве). Поэтому на практике исследовательским полигоном является горно- технический объект, а не его математическая модель. При анализе и обобщении геомеханических условий разработки определенную помощь оказывает закон сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt} + div\vec{Q} = F \ ,$$

где E – плотность энергии, $\vec{Q}$ - вектор потока энергии Умова- Пойнтинга, F – функция координат и времени, определяющая стоки и источники энергии. В частном случае геомеханической среды смещения малы в сравнении с размерами конструктивных элементов систем разработки и доминирующую роль в процессах изменения механического состояния массива горных пород играет энергия деформации, плотность которой W равна ½ $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$,:

$$E = W + \frac{1}{2}\rho v^2 + \varepsilon \qquad (1)$$

$$\vec{Q} = \sigma_{ij} v_j + \frac{1}{2}\vec{c}\rho v^2 + \vec{q} \qquad (2) \ ,$$

где первое слагаемое в (1) - энергия деформации, второе – кинетическая энергия (ρ - плотность массива, v – массовая скорость); первое слагаемое в (2) – поток энергии деформации через поверхность элементарного объема деформируемого твердого тела, второе – символическое обозначение суммы потоков энергии, связанных с распространением различных типов волн (продольных в зажатой среде, поперечных, поверхностных) со скоростью $\vec{c}$; последние слагаемые в (1-2) соответствуют другим видам энергии (тепловой, электромагнитной и т.д.). Аддитивность энергии и ее потоков дают основание для предположения о линейности уравнения для плотности энергии деформации. Например, дивергенцию вектора потока энергии и функцию стоков и источников энергии можно предположить пропорциональными ΔW и W. Тогда получим следующее уравнение сохранения энергии деформации, инвариантное относительно преобразований (параллельных переносов и поворотов) системы отсчета:

$$\frac{dW}{dt} + A\Delta W + BW = C \ ,$$

где A, B, C – функции координат и времени, описывающие свойства массива горных пород, Δ - лапласиан. Последнее уравнение может быть получено из условия экстремума квадратичной формы (по W) функционала. Конструктивный элемент системы разработки является и элементом системы диагностики и контроля механического состояния. Выбор мер по обеспечению устойчивости конструктивных элементов в процессе их эксплуатации осуществляется на основе прогноза развития деформирования и разрушения массива горных пород. При анализе энергии и ее потоков может быть использован метод сетевого программирования.

2. Задача о максимальном потоке энергии

Рассматривается ситуация, возникающая при организации взрывных работ и других операций, обладающих разрушительным потенциалом. Предположим, что намечаются работы, которые, в зависимости от интенсивности выполнения, оказывают то или иное энергетическое воздействие на геомеханическую среду. Через эту среду поток энергии, создаваемый горными работами, передается конструктивным элементам системы разработки. Каждый элемент $j \in N=\{1,\ldots,n\}$ имеет гарантированный резерв прочности, допускающий воздействие, не превышающее a_j. Анизотропная среда, связывающая рассматриваемую работу с элементами, частично поглощает (рассеивает) поток энергии. Задано сопротивление среды r_j в направлении j-го элемента и коэффициент поглощения или потерь k'_j , $j \in N$. Требуется определить предельно допустимую интенсивность выполнения работ или, что равносильно, максимальный поток энергии X, при котором не будет разрушен ни один конструктивный элемент системы. Примером конструктивного элемента камерно- целиковой системы разработки является целик, а параметром, характеризующим поток энергии в данном элементе, - его деформация.

Участок ведения работ (источник потока энергии) соединим дугами с элементами $j \in N$. Рассмотрим произвольную дугу (индекс опускаем). На ее вход поступает поток x', который раскладывается на выходящий поток x и потери x'', так что $x' = x+ x''$, при этом $x''= k'x'$. Пусть $x''=kx$ $(1/k = 1/k' -1)$, тогда $rx=r''kx$ и $r''= r/k$. С учетом этого, задача распределения потока X записывается следующим образом

$$\sum_{j\in N}(r_j x_j^2 + r_j''(k_j x_j)^2) \to min, \qquad (3)$$

$$\sum_{j\in N} x_j(1+k_j) = X, \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0,\ j\in N. \qquad (5)$$

Решаем следующую задачу: $X \to max,\ x_j \le a_j,\ \ j\in N$, при условиях (3)-(5). Учитывая, что $x'_j = x_j\ (1+k_j)$ перепишем (3)-(5) в виде

$$\sum_{j\in N} r'_j(x'_j)^2 \to min, \qquad (3’)$$

$$\sum_{j\in N} x'_j = X, \qquad (4’)$$

$$x'_j \ge 0,\ \ j\in N, \qquad (5’)$$

где $r'_j = (r_j + r''_j k_j^2)/(1+k_j)^2$.

Введем функцию Лагранжа

$$L(x',u)=\sum_j r_j'(x_j')^2-u(\sum_j x_j'-X).$$

Из условия $\partial L/\partial x_j'=0,\ j\in N,$ следует $x_j'=u/(2r_j')$. Подставив это выражение в (4'), получим

$$u\sum_j 1/(2r_j')=X,\quad u=2X/\sum_j (r_j')^{-1},\quad x_i'=X/(r_i'\sum_j 1/r_j')\le a_i(1+k_i),\ i\in N,$$

соответственно,

$$X\le a_i r_i'(1+k_i)\sum_{j\in N}(r_j')^{-1}\ \text{или}\ X=\min\{a_i r_i'(1+k_i), i\in N\}\cdot\sum_{j\in N}(r_j')^{-1}.$$

Обозначим $x_0=\sum_{j\in N}k_j x_j$ - поток, поглощаемый геомеханической средой. Если задано сопротивление r_0, соответствующее x_0, то

$$X=min\{a_i r_i, i\in N\}\cdot\sum_{j\in N_0}(r_j)^{-1}\text{, где } N_0=\{0,1,...,n\}. \qquad (6)$$

Таким образом, в случае, когда известны оценки характеристик среды и элементов системы, рассмотренная задача определения предельно допустимого энергетического воздействия имеет аналитическое решение.

В заключение рассмотрим пример динамических воздействий на конструктивные элементы механической системы. Измерением амплитуд колебаний несущих элементов и сопоставлением с энергией воздействия (например, землетрясения на значительном, в сравнении с размерами системы, расстоянии от конструкции) определяются параметры r. Энергия катастрофического для данной системы воздействия при известных предельных амплитудах колебаний элементов оценивается с помощью уравнения (6).