

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ПЛАСТА

*К.т.н. Болтенгаген И.Л.*

*Институт горного дела СО РАН г. Новосибирск, Россия*

**АННОТАЦИЯ:** Приведены алгебраические формулы для вычисления компонент вектора смещений и тензора напряжений в упругом массиве горных пород вокруг выработанного пространства, созданного в результате выемки запасов горизонтального пласта малой мощности на большой глубине (в сравнении с пролетом отработки). Использовалось решение задачи теории упругости о распределении напряжений и смещений вокруг плоского разреза под действием постоянного внутреннего давления на берегах щели.

### Введение

Аналитическое решение о напряжениях, деформациях и смещениях вокруг протяженной выработки кругового поперечного сечения (решение Кирша) наиболее широко применяется в геомеханических исследованиях. Менее известно аналитическое решение о напряженном состоянии вокруг плоского разреза в упругом пространстве под действием внутреннего давления. Академиком Л.И.Седовым в 1934г. предложена функция комплексной переменной для описания движения несжимаемой жидкости вокруг тонкого крыла [1]. Аналогичная функция использована для расчета коэффициента интенсивности напряжений трещины [2]:

$$Z_1(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{p(x)\sqrt{a^2 - x^2}}{z - x} dx,$$

где  $z=x+iy$  – комплексная переменная,  $x$  и  $y$  – горизонтальная и вертикальная координаты точки плоскости с горизонтальной щелью шириной  $2a$  (начало координат расположено в центре щели),  $p(x)$  – симметрично распределенная по берегам щели нормальная нагрузка.

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и вектора смещений  $U_x$ ,  $V_y$  определяются по формулам

$$\sigma_x = \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1', \quad \sigma_y = \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1', \quad \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z_1'.$$

$$2\mu U_x = \frac{\kappa - 1}{2} \operatorname{Re} Z_0 - y \operatorname{Im} Z_1, \quad 2\mu V_y = \frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{Im} Z_0 - y \operatorname{Re} Z_1.$$

Параметр  $\kappa$  равен  $3-4\nu$  в случае плоской деформации и равен  $(3-\nu)/(1+\nu)$  для плоского напряженного состояния,  $\mu=E/2(1+\nu)$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль упругости. Функция  $Z_0$  определена условием  $Z_1=dZ_0/dz$ . В случае постоянного нормального давления  $p_0$ , приложенного к берегам плоского разреза, функции  $Z_0$  и  $Z_1$  определяются равенствами

$$Z_0(z) = p_0\sqrt{z^2 - a^2} - p_0z, \quad Z_1(z) = \frac{p_0z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - p_0.$$

Последняя формула для функции  $Z_1(z)$  использовалась для решения ряда геомеханических проблем, связанных с особенностями распределения напряжений вокруг обрабатываемого пласта [3-6].

В данной статье выполнены подробные математические выкладки и получено частное решение в случае постоянного внутреннего давления в щели. С учетом начального напряженного состояния массива горных пород аналитическое решение описывает смещения и напряжения вокруг обрабатываемого пласта. Обсуждаются практические применения данного частного решения теории упругости для оценки зон разрушений над выработанными пространствами.

## Математические преобразования

Напомним формулы для аргумента комплексного числа  $z=x+iy$  [7]:  $Arg(z)=arctg(y/x)$  в первом квадранте плоскости ( $x>0,y>0$ ),  $Arg(z)=arctg(y/x)+\pi$  во втором квадранте плоскости ( $x<0,y>0$ ),  $Arg(z)=arctg(y/x)-\pi$  в третьем квадранте плоскости ( $x<0,y<0$ ),  $Arg(z)=arctg(y/x)$  в четвертом квадранте плоскости ( $x>0,y<0$ ). Рассмотрим число  $z^2 - a^2 = x^2 - y^2 - a^2 + 2ixy$ . Анализируем первый квадрант ( $x>0,y>0$ ). Имеем две подобласти, где  $x^2-y^2-a^2>0$  (подобласть **B**) и  $x^2-y^2-a^2<0$  (подобласть **A**). В подобласти **B**  $y<\sqrt{(x^2-a^2)}$  В подобласти **A**  $y>\sqrt{(x^2-a^2)}$ . Получим решение для области массива, расположенной непосредственно над разрезом (подобласть **A**). В этом случае  $y>\sqrt{(x^2-a^2)}$  и  $x^2-y^2-a^2<0$ , а модуль и аргумент  $\Phi$  числа  $x^2-y^2-a^2-2ixy$  равны

$$|z^2 - a^2| = \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}, \quad arg(z^2 - a^2) = arctg \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} + \pi.$$

В частном случае  $x=0$  (ось  $y$ )  $\Phi = \pi$ . В другом частном случае  $y=0$  ( $x<a$ ) (верхний берег разреза) также  $\Phi = \pi$ . Поскольку в рассматриваемом случае подобласти **A**  $x^2-y^2-a^2<0$ , то

$$-\frac{\pi}{2} \leq arctg \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} \leq 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \Phi = arctg \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} + \pi \leq \pi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \frac{\Phi}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$Z_0 = p_0 \sqrt{z^2 - a^2} - p_0 z = p_0 \sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2} \left( \cos \frac{\Phi}{2} + i \sin \frac{\Phi}{2} \right) - p_0(x + iy).$$

Значение  $\Phi/2$  находится в пределах величин от  $\pi/4$  до  $\pi/2$ . Поэтому  $\cos(\Phi/2)$  и  $\sin(\Phi/2)$  положительны. Следовательно

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cos \Phi}}{\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{\Phi}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos \Phi}}{\sqrt{2}}, \quad \cos \Phi = \frac{x^2 - y^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}},$$

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2 - y^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}}}, \quad \sin \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2 - y^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}}}.$$

$$Z_0 = p_0 \sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2} \cos \frac{\Phi}{2} - p_0 x + i(p_0 \sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2} \sin \frac{\Phi}{2} - p_0 y),$$

$$Im Z_0 = p_0 \sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2} \sin \frac{\Phi}{2} - p_0 y,$$

$$Im Z_0 = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} - p_0 y.$$

$$Re Z_0 = p_0 \sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2} \cos \frac{\Phi}{2} - p_0 x,$$

$$Re Z_0 = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} - p_0 x.$$

$$Z_1 = \frac{p_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - p_0 = \frac{p_0(x + iy)}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}} \left( \cos \frac{\Phi}{2} - i \sin \frac{\Phi}{2} \right) - p_0,$$

$$Z_1 = \left( \frac{p_0 x}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}} \cos \frac{\Phi}{2} + \frac{p_0 y}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}} \sin \frac{\Phi}{2} - p_0 \right) +$$

$$+ i \left( \frac{p_0 y}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}} \cos \frac{\Phi}{2} - \frac{p_0 x}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}} \sin \frac{\Phi}{2} \right),$$

$$Re Z_1 = \frac{p_0 x}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}} \cos \frac{\Phi}{2} + \frac{p_0 y}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2y^2}} \sin \frac{\Phi}{2} - p_0.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} Z_1 &= \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} + \\
&+ \frac{p_0 y}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} - p_0 \\
\operatorname{Im} Z_1 &= \frac{p_0 y}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \cos \frac{\Phi}{2} - \frac{p_0 x}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \sin \frac{\Phi}{2}, \\
\operatorname{Im} Z_1 &= \frac{p_0 y}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} - \\
&- \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)}
\end{aligned}$$

Вычисляем компоненты вектора смещения по формулам Колосова- Мусхелишвили

$$\begin{aligned}
2\mu V_y &= \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} Z_0 - y \operatorname{Re} Z_1 = \frac{\kappa+1}{2} \left[ \frac{p_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} - p_0 y \right] - \\
&- \frac{p_0 x y}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} - \\
&- \frac{p_0 y^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} + p_0 y \\
2\mu U_x &= \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} Z_0 - y \operatorname{Im} Z_1 = \frac{\kappa-1}{2} \left[ \frac{p_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} - p_0 x \right] - \\
&- \frac{p_0 y^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} - \\
&- \frac{p_0 x y}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)}
\end{aligned}$$

Отметим, что аналогичные формулы для смещений получаются для подобласти **B** первого квадранта.

Для вычисления напряжений рассмотрим функцию  $Z_1' = dZ_1/dz$

$$Z_1' = -p_0 a^2 \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \frac{1}{z^2 - a^2}.$$

Множители в последнем равенстве удобно для последующих выкладок представить в тригонометрической форме комплексных чисел с помощью уравнений

$$\begin{aligned}
z^2 - a^2 &= \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} e^{i\Phi} = \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} (\cos \Phi + i \sin \Phi), \\
\frac{1}{z^2 - a^2} &= (z^2 - a^2)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} e^{-i\Phi} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} (\cos \Phi - i \sin \Phi), \\
\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} &= (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} e^{-i\frac{\Phi}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \left( \cos \frac{\Phi}{2} - i \sin \frac{\Phi}{2} \right),
\end{aligned}$$

где  $\Phi$  – аргумент комплексного числа  $z^2 - a^2$ , равный

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} + \pi \text{ при условии } x^2 - y^2 - a^2 < 0 \text{ (первый квадрант } x > 0, y > 0) \text{ или}$$

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} \text{ при условии } x^2 - y^2 - a^2 > 0 \text{ (первый квадрант } x > 0, y > 0).$$

В обоих случаях тригонометрические функции  $\Phi$  вычисляются по формулам

$$\cos \Phi = \frac{x^2 - y^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}}, \quad \sin \Phi = \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}}$$

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cos \Phi}}{\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{\Phi}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos \Phi}}{\sqrt{2}},$$

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2 - y^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}}}, \quad \sin \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2 - y^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}}}.$$

$$\begin{aligned} Z'_1 &= -p_0 a^2 \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \frac{1}{z^2 - a^2} = -p_0 a^2 \frac{1}{\sqrt[4]{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} (\cos \frac{\Phi}{2} - i \sin \frac{\Phi}{2}) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} (\cos \Phi - i \sin \Phi) = \\ &= -p_0 a^2 \frac{1}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/4}} [(\cos \frac{\Phi}{2} \cos \Phi - \sin \frac{\Phi}{2} \sin \Phi) - i(\sin \frac{\Phi}{2} \cos \Phi + \cos \frac{\Phi}{2} \sin \Phi)] \\ &\cos \frac{\Phi}{2} \cos \Phi - \sin \frac{\Phi}{2} \sin \Phi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} \frac{x^2 - y^2 - a^2}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/4}} - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} \frac{2xy}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/4}} \\ &\sin \frac{\Phi}{2} \cos \Phi + \cos \frac{\Phi}{2} \sin \Phi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} \frac{x^2 - y^2 - a^2}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/4}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} \frac{2xy}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/4}} \end{aligned}$$

Вещественная и мнимая части функции  $Z'_1$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} Z'_1 &= +p_0 a^2 \frac{1}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/4}} (\sin \frac{\Phi}{2} \cos \Phi + \cos \frac{\Phi}{2} \sin \Phi) = \\ &= \frac{p_0 a^2}{\sqrt{2}} \frac{1}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/2}} [(x^2 - y^2 - a^2) \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} + \\ &+ 2xy \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)}] \\ \operatorname{Re} Z'_1 &= -p_0 a^2 \frac{1}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/4}} (\cos \frac{\Phi}{2} \cos \Phi - \sin \frac{\Phi}{2} \sin \Phi) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_0 a^2}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/2}} [(x^2 - y^2 - a^2) \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} - \\ &- 2xy \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)}] \end{aligned}$$

Напомним, что вещественная часть функции  $Z_1$  определяется с помощью формулы

$$Re Z_1 = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} +$$

$$+ \frac{p_0 y}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} - p_0$$

Напряжения определяются с помощью формул Колосова - Мусхелишвили

$$\sigma_x = Re Z_1 - y Im Z_1' , \quad \sigma_y = Re Z_1 + y Im Z_1' , \quad \tau_{xy} = -y Re Z_1' .$$

$$\sigma_x = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} +$$

$$+ \frac{p_0 y}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} - p_0 -$$

$$- \frac{p_0 a^2}{\sqrt{2}} \frac{y}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/2}} [(x^2 - y^2 - a^2) \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} +$$

$$+ 2xy \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)}]$$

$$\sigma_y = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} +$$

$$+ \frac{p_0 y}{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} - p_0 +$$

$$+ \frac{p_0 a^2}{\sqrt{2}} \frac{y}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/2}} [(x^2 - y^2 - a^2) \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)} +$$

$$+ 2xy \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)}]$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_0 a^2 y}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{3/2}} [(x^2 - y^2 - a^2) \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} + (x^2 - y^2 - a^2)} -$$

$$- 2xy \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} - (x^2 - y^2 - a^2)}]$$

Формулы для напряжений и смещений значительно упрощаются, если ввести следующие обозначения для радикалов

$$R = \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2} , \quad R_+ = \sqrt{R + (x^2 - y^2 - a^2)} , \quad R_- = \sqrt{R - (x^2 - y^2 - a^2)} .$$

$$\sigma_x = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \frac{xR_+ + yR_-}{R} - \frac{p_0 a^2 y}{\sqrt{2}} \frac{[(x^2 - y^2 - a^2)R_- + 2xyR_+]}{R^3} - p_0 ,$$

$$\sigma_y = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \frac{xR_+ + yR_-}{R} + \frac{p_0 a^2 y}{\sqrt{2}} \frac{[(x^2 - y^2 - a^2)R_- + 2xyR_+]}{R^3} - p_0 ,$$

$$\tau_{xy} = \frac{p_0 a^2 y [(x^2 - y^2 - a^2)R_+ - 2xyR_-]}{\sqrt{2} R^3} .$$

$$2\mu V_y = \frac{\kappa + 1}{2} \left[ \frac{p_0}{\sqrt{2}} R_- - p_0 y \right] - \frac{p_0 (xyR_+ + y^2 R_-)}{\sqrt{2} R} + p_0 y ,$$

$$2\mu U_x = \frac{\kappa - 1}{2} \left[ \frac{p_0}{\sqrt{2}} R_+ - p_0 x \right] - \frac{p_0 (y^2 R_+ + xyR_-)}{\sqrt{2} R} .$$

Приведем все полученные формулы для вычисления смещений и напряжений в одном месте в рамке.

### Смещения

$$\begin{aligned}
 2\mu U_x &= \frac{\kappa-1}{2} \left[ \frac{p_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}+(x^2-y^2-a^2)} - p_0x \right] - \\
 &- \frac{p_0y^2}{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}+(x^2-y^2-a^2)} - \\
 &- \frac{p_0xy}{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}-(x^2-y^2-a^2)} \\
 2\mu V_y &= \frac{\kappa+1}{2} \left[ \frac{p_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}-(x^2-y^2-a^2)} - p_0y \right] - \\
 &- \frac{p_0xy}{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}+(x^2-y^2-a^2)} - \\
 &- \frac{p_0y^2}{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}-(x^2-y^2-a^2)} + p_0y
 \end{aligned}$$

$$\kappa = 3 - 4\nu, \quad \frac{\kappa-1}{2} = 1 - 2\nu, \quad \frac{\kappa+1}{2} = 2(1-\nu) \quad \text{для условия плоской деформации;}$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \frac{\kappa-1}{2} = \frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad \frac{\kappa+1}{2} = \frac{2}{1+\nu} \quad \text{для условия плоского напряженного состояния;}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{- модуль сдвига.}$$

### Напряжения

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{p_0x}{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}+(x^2-y^2-a^2)} + \\
 &+ \frac{p_0y}{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}-(x^2-y^2-a^2)} - p_0 - \\
 &- \frac{p_0a^2}{\sqrt{2}} \frac{y}{[(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2]^{3/2}} [(x^2-y^2-a^2)\sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}-(x^2-y^2-a^2)} + \\
 &+ 2xy\sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}+(x^2-y^2-a^2)}] \\
 \sigma_y &= \frac{p_0x}{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}+(x^2-y^2-a^2)} + \\
 &+ \frac{p_0y}{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}-(x^2-y^2-a^2)} - p_0 + \\
 &+ \frac{p_0a^2}{\sqrt{2}} \frac{y}{[(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2]^{3/2}} [(x^2-y^2-a^2)\sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}-(x^2-y^2-a^2)} + \\
 &+ 2xy\sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}+(x^2-y^2-a^2)}] \\
 \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_0a^2y}{[(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2]^{3/2}} [(x^2-y^2-a^2)\sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}+(x^2-y^2-a^2)} \\
 &- 2xy\sqrt{\sqrt{(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2}-(x^2-y^2-a^2)}]
 \end{aligned}$$

Приведенные формулы для компонент вектора смещений и тензора напряжений полученного частного решения задачи о деформировании упругого пространства с плоским разрезом под действием нормального давления, приложенного к его берегам, могут найти применение в геомеханических исследованиях. Например, если положить давление  $p_0$  равным  $\gamma H$ , то данные формулы могут быть использованы для оценок напряжений и смещений массива горных пород при выемке запасов горизонтального пласта малой мощности на большой глубине (в сравнении с пролетом отработки).

### Анализ решения

Напряжения и смещения в других квадрантах определяются из симметрии относительно осей координат. Приведенные формулы для аналитического определения компонент тензора напряжений и вектора смещений частного решения Седова о деформировании упругого пространства с плоским разрезом под действием постоянного нормального давления на берегах щели могут применяться для анализа геомеханических условий.

В частности, полученные формулы описывают дополнительные напряжения и смещения массива горных пород вокруг горизонтального выработанного пространства малой высоты на больших глубинах (в сравнении с его шириной), если величина  $p_0$  равна вертикальной компоненте начальных напряжений  $\gamma H$  ( $\gamma$  – удельный вес,  $H$  – глубина) и параметр  $k$  равен  $3-4\nu$  (обобщенная плоская деформация). Полные величины напряжений равны сумме начальных и дополнительных напряжений.

На рис.1 показаны изолинии компонент дополнительных напряжений, смещений и деформаций, обусловленных созданием выработанного пространства (в единицах  $\gamma H$ ,  $\gamma H a/E$  и  $\gamma H/E$  соответственно) при равенстве коэффициента Пуассона 0.25 для обобщенной плоской деформации. Вследствие симметрии в каждом квадранте плоскости показана одна из компонент.

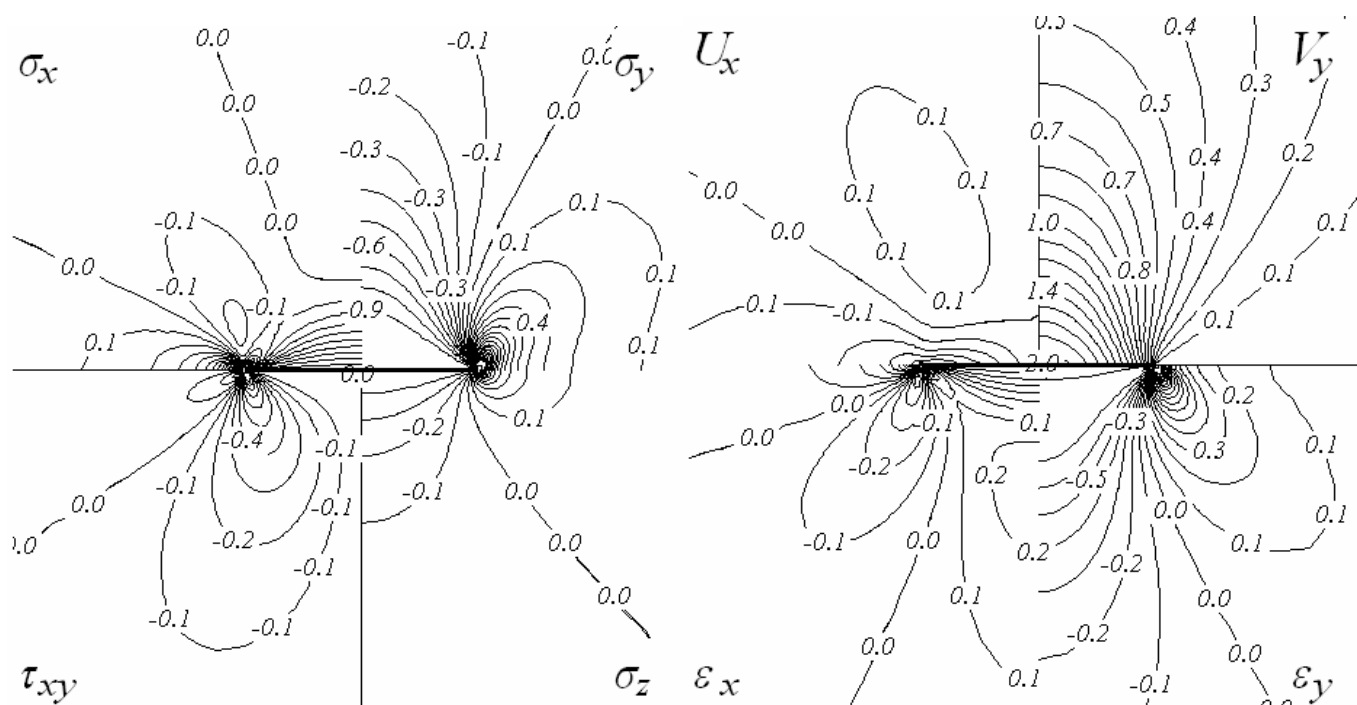


Рис.1. Изолинии напряжений, смещений и деформаций вокруг отработываемого пласта.

Анализ распределения вертикальных напряжений показывает, что массив горных пород, расположенный под и над пластом подвергается растяжениям. В кровле и в почве дополнительные вертикальные и горизонтальные растяжения, обусловленные созданием выработанного пространства, равны  $-\gamma H$ . В этих условиях деформирования полные вертикальные напряжения с учетом начального вертикального напряжения, равного  $\gamma H$ , остаются сжимающими. Полные

горизонтальные напряжения определяются величиной коэффициента бокового распора  $\lambda$ , отношения горизонтального напряжения  $\lambda\gamma H$  к вертикальному  $\gamma H$ . Напряжение в кровле в данном случае протяженного выработанного пространства при большом (в сравнении с его высотой) пролете отработки оценивается величиной  $-\gamma H + \lambda\gamma H$  ( $H$  – глубина). При коэффициенте бокового распора  $\lambda > 1$ , напряжения являются сжимающими. При  $\lambda < 1$  – растягивающими. Учитывая значительную разность прочности массива на растяжение и на сжатие, данное обстоятельство иллюстрирует возможность качественных различий в поведении подработанного массива горных пород. При  $\lambda < 1$  вероятно разрушение подработанной толщи вертикальными трещинами вследствие растягивающих напряжений в кровле выработанного пространства даже на небольших глубинах. Для  $\lambda > 1$  при достижении напряжениями прочности на сжатие происходит разрушение кровли в соответствии с критерием прочности Кулона-Мора с формированием трещин сдвига под углом около  $30^\circ$  ( $\pi/4 - \varphi/2$ ,  $\varphi$  – угол трения) к поверхности кровли и вероятными вывалами пород в форме треугольных блоков и горизонтальных пластин. Использование гипотезы Динника для моделирования бокового распора в данном случае приводит к выводу о наличии в кровле выработанного пространства растяжений, а гипотезы Гейма – о нулевой величине напряжений в кровле. На рис.2 (слева) показаны конфигурации зон растяжения минимального главного напряжения вокруг выработанного пространства для различных значений коэффициента бокового распора в диапазоне величин от 0 до 0.9 с шагом 0.1. Маркировка на линии соответствует величине  $\lambda$ . На том же рисунке (справа) показаны изолинии коэффициента запаса прочности

$$f = \frac{2C \cos \varphi + (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \varphi}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}$$

при различном отношении горизонтальной и вертикальной компонент начальных напряжений  $\lambda$ , показанном в соответствующем квадранте. Угол внутреннего трения  $\varphi$  и сцепление  $C$  равны  $30^\circ$  и  $0.165\gamma H$  соответственно. Изолиния коэффициента запаса прочности, равного 1, ограничивает область разрушения массива по критерию Кулона-Мора. Отметим конфигурацию зоны разрушения для  $\lambda=1$ . В непосредственной кровле разрушения отсутствуют. Зона запредельного деформирования расположена на расстоянии 0.1-0.2 ширины выработанного пространства над его центром. Это объясняет формирование техногенных трещин в форме «шапочки» над выработкой.

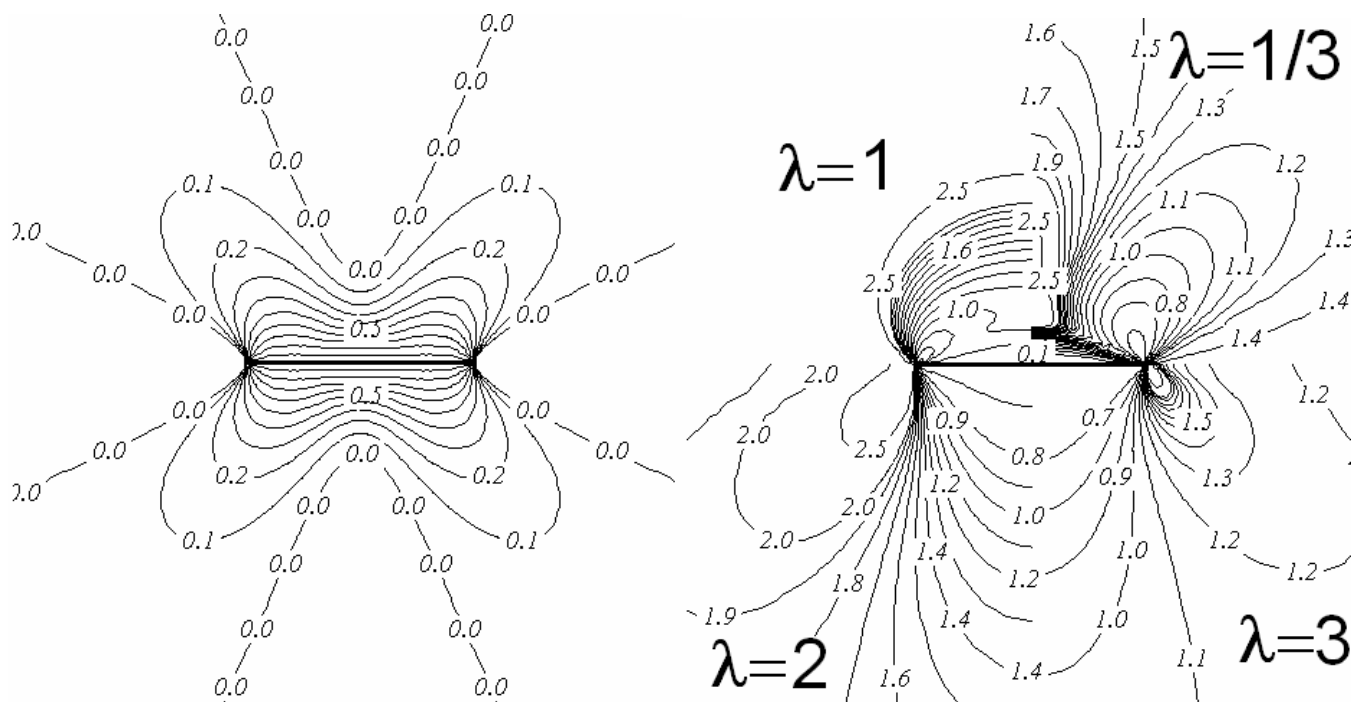


Рис.2. Зоны растягивающих минимальных главных напряжений (слева) вокруг пласта (на линиях приведены величины  $\lambda$ ). Изолинии коэффициента запаса прочности массива горных пород (справа) для четырех значений  $\lambda$ , показанных на соответствующих квадрантах.



Рассмотрим частные случаи распределения смещений и напряжений по координатным осям. Сначала рассмотрим горизонтальную ось координат ( $y=0$ ). В случае  $x>a$  (зона опорного давления) дополнительные напряжения и смещения определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} - p_0, \sigma_y = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} - p_0, 2\mu U_x = \frac{\kappa - 1}{2} p_0 [\sqrt{(x^2 - a^2)} - x], 2\mu V_y = 0.$$

В случае  $x<a$  (кровля и почва выработанного пространства) дополнительные смещения и напряжения на горизонтальной оси координат определяются по формулам

$$2\mu U_x = -\frac{\kappa - 1}{2} p_0 x, 2\mu V_y = \frac{\kappa + 1}{2} p_0 \sqrt{a^2 - x^2}, \sigma_x = -p_0, \sigma_y = -p_0.$$

В кончике разреза ( $x=a$ ) дополнительные смещения непрерывны и определяются из уравнений

$$2\mu U_x = -\frac{\kappa - 1}{2} p_0 a, 2\mu V_y = 0,$$

а дополнительные напряжения имеют особенность. На берегах они равны  $-p_0$ , а при приближении к кончику разреза со стороны вмещающего упругого тела равны

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{p_0 x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} - p_0$$

и стремятся к бесконечности. Исследуем характер особенности справа от правого кончика разреза. Введем расстояние от кончика, равное  $r=x-a$ . Уравнение для напряжения при предельном переходе  $r \rightarrow 0$

$$\sigma_x = \sigma_y \approx p_0 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} - p_0.$$

С учетом начального растяжения плоскости вертикальным напряжением  $p_0$  при малых расстояниях  $r$  получим  $\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ , где коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  определяется по формуле  $K_I = p_0 \sqrt{\pi a}$ , что соответствует эллиптической трещине [8].

На вертикальной оси координат ( $x=0$ ):

$$\sigma_x = \frac{p_0 y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \left(1 + \frac{a^2}{y^2 + a^2}\right) - p_0, \sigma_y = \frac{p_0 y^3}{(y^2 + a^2)^{3/2}} - p_0,$$

$$2\mu U_x = 0, 2\mu V_y = \frac{p_0 a^2}{\sqrt{y^2 + a^2} + y} \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}}\right).$$

Последнее уравнение использовалось для анализа результатов экспериментов методом целевой разгрузки [9].

## Вывод

Полученные аналитические формулы для расчета смещений и напряжений вокруг пласта являются элементарными алгебраическими функциями координат и могут найти применение в геомеханических исследованиях. В частности аналитические вертикальные смещения вокруг разреза использовались для анализа нагрузок на целики варианта камерно - столбовой системы разработки [10] и для анализа смещений земной поверхности [11].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. С.51.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.2. – М.: Наука, 1973. С.529-530.

3. **Кузнецов С.В.** Общие закономерности и характерные особенности перераспределения напряжений в массивах горных пород при развитии выработанного пространства. // ФТПРПИ.-1988.-№6.
4. **Кузнецов С.В., Трофимов В.А.** Напряжения и смещения вокруг отработанного по простиранию участка пласта // ФТПРПИ.-2000.-№5.
5. **Кузнецов С.В., Трофимов В.А.** Аномальные поля напряжений в окрестности тектонических нарушений в массиве горных пород // ФТПРПИ.-2002.-№1.
6. **Кузнецов С.В., Рыбаков Д.Ю., Трофимов В.А.** Использование интегрального критерия прочности для оценки предельного пролета горизонтальной очистной выработки // Материалы XVI Международной научной школы им. Академика С.А.Христиановича (Крым, Алушта, 18-24 сентября 2006г.) «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках». – Симферополь: Таврический национальный университет, 2006. С.152-157.
7. **Аленицын А.Г., Бутиков Е.И., Кондратьев А.С.** Краткий физико-математический справочник. – М.: Наука, 1990. С.89.
8. **Броек Д.** Основы механики разрушения. – М.: Высшая школа, 1980. С.18.
9. **Барышников В.Д., Болтенгаген И.Л., Коврижных А.М.** Определение напряжений методом щелевой разгрузки // Труды международной конференции 6-9 октября 2003, Новосибирск «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли». – Новосибирск: ИГД СО РАН, 2004. С. 126-131.
10. **Болтенгаген И.Л.** Геомеханический анализ камерно - целиковой системы разработки // Труды научной конференции с участием иностранных ученых 10-13 октября 2005, Новосибирск «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли». – Новосибирск: ИГД СО РАН, 2006. С. 84-92.
11. **Барышников В.Д. и др.** Оценка смещений земной поверхности и нагрузок на целики для горнотехнических условий рудника «Бадран» // Доклад на научной конференции с участием иностранных ученых 10-13 октября 2006, Новосибирск «Фундаментальные проблемы формирования техногенной среды».